1. НЕ-ЭВКЛИДОВА ГЕОМЕТРІЯ.

2. ЧЕТВЕРТОЕ ИЗМѢРЕНІЕ.

(ПОПУЛЯРНЫЙ ОЧЕРКЪ).

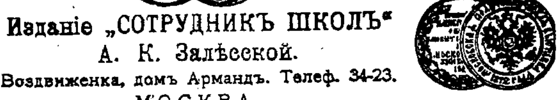
Отдѣльный оттискъ изъ „Физико-Математической Хрестоматіи“

А. А. Лямина.

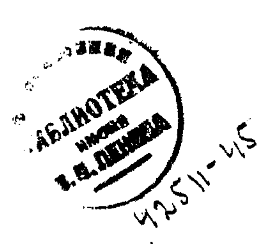
Цѣна 50 коп.







Изданіе „СОТРУДНИКЪ ШКОЛЪ“
А. К. Залѣсской.
Воздвиженка, домъ Армандъ. Телеф. 34-23.
МОСКВА.





МОСКВА.
Типографія Т-ва Рябушинскихъ, Страстной бул., Путинковскій пер., соб. домъ.
1914.

Не-Эвклидова геометрія.

Исторія элементарной геометріи представляетъ одну особенность, отличающую ее отъ исторіи другихъ отдѣловъ математики. Всѣ остальныя математическія дисциплины развивались такъ, что въ теченіе извѣстнаго періода та или иная книга была руководящей, представляла собою наиболѣе полную сводку добытыхъ знаній; потомъ эта книга отживала свой вѣкъ, и ея мѣсто занимала болѣе современная. Не то въ геометріи. Здѣсь первый крупный трудъ, появившійся болѣе двухъ тысячъ лѣтъ тому назадъ, сохранялъ свое господство непоколебленнымъ до самаго послѣдняго времени. Мы говоримъ, конечно, о «Началахъ» Эвклида написанныхъ приблизительно за 300 л. до Р. Х. Никто теперь не станетъ изучать ариѳметику по Діофанту или теорію коническихъ сѣченій по Апполонію; между тѣмъ подлинникъ Эвклида до послѣдняго времени служитъ учебной книгой въ англійской средней щколѣ, а наши учебники представляютъ собой, по существу, сокращенную переработку все тѣхъ же безсмертныхъ «Началъ». Читатель, можетъ быть, склоненъ будетъ объяснить себѣ это тѣмъ, что элементарная геометрія была въ существенномъ закончена уже древними, и потому въ теченіе вѣковъ оставалась на мертвой точкѣ. Но это не совсѣмъ такъ; впослѣдствіи увидимъ, что критическая работа надъ основаніями геометріи не только не прекращалась послѣ Эвклида, но даже достигла гораздо большихъ глубинъ, чѣмъ въ другихъ отрасляхъ математики. И все-таки, до XIX-го вѣка геометры не рѣшались открыто посягнуть на авторитетъ Эвклида. Изслѣдованія ихъ

появлялись подъ осторожными заглавіями, напр., «Эвклидъ, освобожденный отъ всякихъ пятенъ»... (*Саккери*, 1667—1733), и даже самъ творецъ термина «не-Эвклидова геометрія»—*Гауссъ* (1777—1856), не рѣшался произнести эти «дерзновенныя» слова за предѣлами узкаго кружка друзей.

Посмотримъ теперь, въ чемъ корень жизненности Эвклидовыхъ «Началъ». Позднѣйшія изслѣдованія установили, что Эвклидъ не подвелъ научнаго фундамента подъ зданіе геометріи; но онъ глубоко проникъ въ сущность *метода* этой науки; задача обоснованія геометріи Эвклидомъ не была рѣшена, но зато была правильно поставлена.

Геометрія есть наука дедуктивная. Въ основѣ ея должно лежать конечное число такъ называемыхъ «предпосылокъ», т.-е. опредѣленій и аксіомъ (на природѣ этихъ предпосылокъ мы остановимся впослѣдствіи), всѣ же остальныя предложенія, составляющія содержаніе геометріи, должны быть только слѣдствіями основныхъ предпосылокъ, образованными по правиламъ формальной логики. Въ этомъ состоитъ особенность геометрическаго метода, усвоенная Эвклидомъ, особенность, которая должна давать намъ убѣжденіе въ непогрѣшимости геометріи. Болѣе того, можно сказать, что это методъ не спеціально геометрическій, а методъ всей математики. Не даромъ французы называютъ математиковъ, независимо отъ сферы ихъ научной дѣятельности, «геометрами» (géométres). А философъ Спиноза, когда хотѣлъ подчеркнуть строго-логическій характеръ своего богословскаго трактата, написалъ въ подзаголовкѣ, что книга изложена «modo geometrico» («по геометрическому методу»).

Несомнѣнно, что идеалъ именно такой геометріи стоялъ передъ умственнымъ взоромъ Эвклида *). Это проявляется въ той педантичности, съ какой онъ доказываетъ самыя элементарныя и очевидныя теоремы—обстоятельство, вызывающее часто недоумѣніе у начинающихъ изучать геометрію. Было уже сказано, что Эвклидъ только *понималъ*, въ чемъ состоитъ задача

*) Мы не касаемся здѣсь спора между историками математики—были ли „Начала“ дѣломъ рукъ одного человѣка или многихъ. Существуютъ вѣскія основанія полагать, что во всякомъ случаѣ тѣ изданія „Началъ“, которыя дошли до насъ, перерабатывались и дополнялись различными авторами. Если это такъ, то все, что говорится у насъ объ Эвклидѣ, слѣдуетъ отнести къ этому собирательному лицу.

строгаго обоснованія геометріи, но выполненіе этой задачи оказалось ему не подъ силу. Ниже указаны главные недостатки Эвклидовыхъ «Началъ».

1) Списокъ аксіомъ далеко не полонъ; слѣдуетъ замѣтить, что Эвклидъ дѣлитъ аксіомы почему то на двѣ категоріи: собственно-аксіомы и постулаты—раздѣленіе, отвергаемое современной наукой; у Эвклида отсутствуютъ нѣкоторыя предложенія, которыя необходимы для строго-логическаго вывода дальнѣйшихъ теоремъ. Такъ, напр., пользуясь методомъ наложенія, Эвклидъ не вводитъ аксіомы о возможности накладывать части плоскости друга на друга. Между тѣмъ это свойство присуще не всякой поверхности—имъ не обладаетъ, напр., эллипсоидъ.

2) Эвклидъ не доказываетъ, что принятыя имъ аксіомы и опредѣленія не содержатъ внутренняго противорѣчія. Вѣдь не всякія предпосылки могутъ быть соединены другъ съ другомъ. Предположимъ, напр., что въ главу элементарной геометріи, содержащую классификацію треугольниковъ, мы ввели бы слѣдующее опредѣленіе: «треугольникъ, въ которомъ полупериметръ меньше каждой стороны, называется и т. д.». Для неопытнаго глаза, это опредѣленіе не заключаетъ въ себѣ ничего предосудительнаго. Между тѣмъ легко показать, что треугольника, о которомъ идетъ рѣчь въ нашемъ «опредѣленіи» не существуетъ, иначе говоря существованіе такого треугольника противорѣчитъ тѣмъ предпосылкамъ, которыя лежатъ въ основѣ геометріи. Изслѣдуя свойства этого фиктивнаго треугольника, мы рискуемъ рано или поздно притти къ абсурду. Послѣдній совсѣмъ не долженъ обнаружиться немедленно; въ учебникахъ логики часто приводятся примѣры того, какъ изъ невѣрныхъ (напр., противорѣчащихъ другъ другу) предпосылокъ выводятся вѣрныя слѣдствія. То, что Эвклидова геометрія не привела насъ до сихъ поръ къ абсурду, само по себѣ не является еще доказательствомъ отсутствія въ ней противорѣчій; быть можетъ, эти противорѣчія заложены такъ глубоко, что еще не успѣли обнаружиться. Смыслъ сдѣланныхъ нами сейчасъ замѣчаній лучше уяснится впослѣдствіи, когда мы познакомимся съ не-Эвклидовой геометріей.

Если отмѣченные два пробѣла Эвклидовой системы подрываютъ

логическую ея цѣнность, то слѣдующіе два (см. ниже пп. 3 и 4), погрѣшаютъ уже противъ другого принципа точнаго знанія—«принципа экономіи мышленія». Они обременяютъ геометрическую систему, навязывая ей излишній, съ точки зрѣнія логики, балластъ.

3) Нѣкоторыя опредѣленія Эвклида совершенно безсодержательны, въ томъ смыслѣ, что изъ нихъ не приходится дѣлать выводовъ. Возьмемъ, напр., Эвклидово опредѣленіе точки: «точка есть то, что не имѣетъ протяженія». Вѣдь нигдѣ въ дальнѣйшемъ Эвклиду не приходится ссылаться на то, что точка не имѣетъ протяженія, а такъ какъ предпосылки имѣютъ цѣнность лишь постольку, поскольку изъ нихъ можно дѣлать выводы, то приведенное опредѣленіе слѣдуетъ признать совершенно лишнимъ. Его можно было бы вычеркнуть, и этимъ не былъ бы затронутъ ни одинъ камешекъ въ Эвклидовомъ зданіи. На это старые математики возразили бы, что разъ рѣчь идетъ о «точкѣ», то этотъ терминъ надо опредѣлить—иначе придется разсуждать о «пустомъ звукѣ», о понятіи, не имѣющемъ содержанія. Однако современная наука обнаружила, что *логика* такого требованія не ставитъ; наоборотъ, въ строго-математическихъ разсужденіяхъ цѣнны именно понятія, не связанныя ни съ какими реальными представленіями. Чѣмъ наука «отвлеченнѣе» (отвлекаемся отъ реальныхъ представленій), тѣмъ она точнѣе. Реальные образы только *облегчаютъ* намъ процессъ мышленія, создавая иллюстрацію къ отвлеченному разсужденію,—но это требованіе исходитъ уже не отъ логики, а отъ слабости нашего мышленія. Итакъ, Эвклидово опредѣленіе точки не имѣетъ логической цѣнности; но оно не облегчаетъ и процесса мышленія; для этого было бы цѣлесообразнѣе вызвать въ нашемъ представленіи тѣ образы, которые мы въ жизни принимаемъ за точки (точка, начерченная на бумагѣ, остріе иглы и т. п.).

4) Эвклидъ не замѣчаетъ, что нѣкоторыя его аксіомы могутъ быть вполнѣ или частично доказаны (при помощи другихъ аксіомъ), т.-е. на самомъ дѣлѣ являются теоремами или включаютъ въ себя теоремы. Такъ, напримѣръ, IV постулатъ «Началъ» гласитъ, что «всѣ прямые углы равны между собой»—между тѣмъ доказательство этого предложенія можно теперь найти въ

любомъ элементарномъ учебникѣ. Выражаясь современнымъ научнымъ языкомъ можно сказать, что система Эвклида не удовлетворяетъ требованію «независимости предпосылокъ другъ отъ друга».

Комментаторы Эвклида.

Уже ближайшимъ преемникамъ Эвклида были ясны нѣкоторые изъ указанныхъ выше недочетовъ его системы. Архимедъ пополнилъ списокъ аксіомъ весьма важнымъ предложеніемъ, которое и вошло въ науку подъ именемъ «Архимедова постулата»: «изъ двухъ неравныхъ величинъ, меньшая всегда можетъ быть повторена слагаемымъ столько разъ, чтобы сумма превзошла бóльшую величину».

Усиленное вниманіе первыхъ комментаторовъ Эвклида привлекалъ также вопросъ о «независимости предпосылокъ»: нельзя ли доказать нѣкоторыя аксіомы Эвклида, подобно тому, какъ это оказалось возможнымъ для лишней «аксіомы» о равенствѣ прямыхъ угловъ? Такое направленіе критической мысли представлялось достаточно скромнымъ и соотвѣтствовало огромному въ то время авторитету Эвклидовыхъ «Началъ». Это было именно *исправленіе* деталей, а не *пересмотръ* всей системы.

Среди предпосылокъ, «заподозрѣнныхъ» древними въ доказуемости, особенно часто останавливались комментаторы на такъ наз. «пятомъ постулатѣ» *), составляющемъ основаніе теоріи параллельности. У Эвклида этотъ постулатъ формулируется такъ: («*требуется), чтобы двѣ прямыя, которыя при пересѣченіи съ третьей образуютъ внутренніе односторонніе углы, составляющіе въ суммѣ менѣе двухъ прямыхъ, пересѣклись при продолженіи въ ту сторону, гдѣ сумма угловъ меньше двухъ прямыхъ*».

Не трудно объяснить себѣ, почему именно этотъ постулатъ вызвалъ настойчивыя попытки доказать его, какъ теорему. Прежде всего, самая редакція постулата настолько сложна, что уясн-

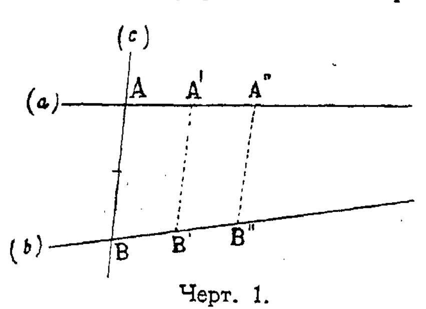
*) Въ нѣкоторыхъ изданіяхъ Эвклида этотъ постулатъ помѣщенъ въ общемъ спискѣ аксіомъ и занимаетъ тамъ 11-е мѣсто. Поэтому въ математической литературѣ разсматриваемое предложеніе нерѣдко называютъ «XI-ой аксіомой».

ніе ея требуетъ нѣкотораго напряженія; между тѣмъ «аксіома» въ наивномъ пониманіи древнихъ должна была представляться «истиной, очевидной непосредственно».

Далѣе обращали вниманіе на то, что первыя 26 теоремъ «Началъ» доказываются безъ помощи V-го постулата. Значитъ, въ первыхъ предпосылкахъ Эвклида заключается уже достаточный матеріалъ для характеристики свойствъ нашего пространства. И вдругъ оказывается необходимымъ ввести еще новое свойство, безъ котораго не удается ни вывести теорему о суммѣ угловъ треугольника, ни развить теорію подобія.

Сообразно этимъ двумъ особенностямъ V-го постулата, изслѣдованія шли въ двухъ направленіяхъ. Одни старались замѣнить Эвклидовъ постулатъ другимъ предложеніемъ, тоже принимаемымъ безъ доказательства, но болѣе «очевиднымъ». Другіе ставили себѣ цѣлью—не вводя новаго постулата, доказать предложеніе о параллеляхъ посредствомъ остальныхъ Эвклидовыхъ предпосылокъ. Въ истинности V-го постулата не сомнѣвался тогда никто, даже софисты, хотя послѣдніе и предлагали доказательства, какъ бы опровергающія Эвклидовъ постулатъ. Вотъ одно изъ такихъ доказательствъ.

Пусть (a) и (b) двѣ прямыя (черт. 1), пересѣченныя третьей (c), о которыхъ говорится въ V постулатѣ, и пусть справа отъ сѣкущей (c) внутренніе односторонніе углы въ суммѣ меньше $2d$ (послѣднее обстоятельство не играетъ, впрочемъ, никакой роли въ доказательствѣ). На прямыхъ (a) и (b), вправо отъ точекъ A и B, отложимъ отрѣзки AA' и BB' равные $\frac{1}{2} AB$. На протяженіи отрѣзковъ AA' и BB' не можетъ произойти встрѣча прямыхъ (a) и (b) (другими словами, отрѣзки эти не могутъ имѣть общей точки),—въ противномъ случаѣ образовался бы треугольникъ, у котораго сумма двухъ сторонъ (именно лежащихъ на отрѣзкахъ AA' и BB') была бы меньше или равна (если бы совпали точки A' и B') третьей сторонѣ. Соединимъ теперь A' съ B',



Черт. 1.

отложимъ $A'A''=B'B''=\frac{1}{2}A'B'$ и совершенно такъ же докажемъ, что встрѣча прямыхъ (a) и (b) не можетъ произойти на протяженіи отрѣзковъ $A'A''$ и $B'B''$. Такъ какъ это разсужденіе мы можемъ повторять сколько угодно разъ, подвигаясь все вправо по прямымъ (a) и (b), то отсюда заключали, что прямыя (a) и (b) нигдѣ не пересѣкутся, и слѣдовательно утвержденіе Эвклида невѣрно.

Доказательство это весьма типично для того цикла разсужденій, которыя со временъ Зенона смущали умъ грековъ. Оно построено совершенно такъ же, какъ знаменитый софизмъ объ Ахиллесѣ и черепахѣ, и содержитъ ту же самую логическую ошибку. Впрочемъ, софистичность приведеннаго выше доказательства ясна уже изъ того, что вѣдь мы могли бы взять прямыя (a) и (b) *завѣдомо* пересѣкающимися,—напр. взять съ самаго начала треугольникъ, образованный прямыми (a), (b) и (c)—и тогда пришли бы къ явному абсурду: «двѣ стороны треугольника *не* пересѣкаются».

Мы привели этотъ примѣръ для того, чтобы показать, съ какими сильными противниками приходилось имѣть дѣло творцамъ основаній геометріи. Здѣсь сказалась—какъ, впрочемъ, и во многихъ другихъ областяхъ точнаго знанія—положительная сторона работы софистовъ.

Первыя попытки доказать V постулатъ, повидимому, привели только къ другимъ формулировкамъ его, какъ, напр.:

1) черезъ данную точку проходитъ только одна прямая параллельная данной прямой; или

2) перпендикуляръ и наклонная къ одной и той же прямой пересѣкаются.

Безуспѣшность этихъ попытокъ заставила геометрическую мысль работать въ другомъ направленіи: быть можетъ самое опредѣленіе параллельныхъ прямыхъ выбрано Эвклидомъ неудачно? нельзя ли такъ видоизмѣнить это опредѣленіе, чтобы V постулатъ сталъ лишнимъ? Первая изъ дошедшихъ до насъ попытокъ этого рода связана съ именемъ геометра *Посидонія* (I в. до Р. Х.), который предложилъ называть двѣ прямыя параллельными, если онѣ, находясь въ одной плоскости, повсюду равно отстоятъ другъ отъ друга. Такое опредѣленіе предста-

вляется на первый взглядъ очень соблазнительнымъ: 1) оно отвѣчаетъ нашему наглядному представленію о параллельныхъ прямыхъ; 2) изъ него можно вывести V постулатъ, хотя бы въ той формѣ, что «перпендикуляръ и наклонная къ одной и той же прямой пересѣкаются». Соотвѣтствующее доказательство приписывается нѣкоторыми историками современнику Посидонія, *Гемину*. Характерно, что Геминъ очень тонко пользуется въ своемъ разсужденіи постулатомъ Архимеда (см. выше).

Въ виду того, что къ идеѣ «равноотстоящихъ прямыхъ», въ той или иной варіаціи, возвращаются многіе позднѣйшіе изслѣдователи, мы считаемъ нужнымъ остановиться подробнѣе на опредѣленіи Посидонія, тѣмъ болѣе, что допущенная имъ ошибка довольно поучительна.

Было уже сказано, что не всякое опредѣленіе имѣетъ право на существованіе въ данной логической системѣ. И это потому, что опредѣленіе, взятое само по себѣ, содержитъ всегда нѣчто большее, чѣмъ объясненіе новаго термина: оно содержитъ въ скрытомъ видѣ *новое утвержденіе*, именно утвержденіе того, что опредѣляемая комбинація объектовъ дѣйствительно существуетъ. Разъ такъ, то къ опредѣленіямъ примѣнимы тѣ же требованія, что и къ новому утвержденію. Необходимо изслѣдовать, не будетъ ли это скрытое утвержденіе теоремой, или новой аксіомой, или, наконецъ, не противорѣчитъ ли оно ранѣе принятымъ предпосылкамъ.

Съ этой точки зрѣнія сопоставимъ опредѣленія Эвклида и Посидонія. Эвклидово опредѣленіе параллельныхъ прямыхъ («прямыя, которыя находясь въ одной плоскости, не пересѣкаются») безупречно, такъ какъ скрытое въ немъ утвержденіе есть *теорема*: «существуютъ лежащія въ одной плоскости и непересѣкающіяся прямыя», которую легко доказать при помощи двухъ перпендикуляровъ къ одной прямой.

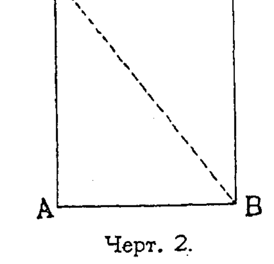
Между тѣмъ опредѣленіе Посидонія въ скрытой формѣ утверждаетъ, что «существуютъ равноотстоящія прямыя»— предложеніе, котораго Посидоній не доказалъ и—какъ станетъ ясно изъ дальнѣйшаго—не могъ доказать. Предложеніе это представляетъ собою *новую аксіому* (постулатъ)—и, слѣдовательно, дѣла не мѣняетъ.

Комментаторъ Эвклида *Проклъ* (V в.), изъ сочиненія котораго мы главнымъ образомъ и знаемъ, о предшествующей исторіи V-го постулата, предлагаетъ собственное доказательство, основанное, конечно, опять на новомъ допущеніи. Именно, Проклъ *допускаетъ* (принимая опредѣленіе Эвклида), что разстояніе между двумя параллелями остается конечнымъ (т.-е. всегда меньше нѣкоторой длины), а разстояніе между двумя пересѣкающимися прямыми возрастаетъ безконечно. Второе изъ этихъ двухъ допущеній было впослѣдствіи доказано, и притомъ безъ ссылки на постулатъ о параллеляхъ. Первое же представляетъ собою дѣйствительно новый постулатъ, равносильный V-му

Въ средніе вѣка вопросъ о пятомъ постулатѣ занималъ наслѣдниковъ античной науки—арабовъ. Здѣсь заслуживаетъ быть отмѣченнымъ изслѣдованіе *Нассиръ-Эдина* (XIII в.), находившагося, повидимому, подъ вліяніемъ идей Гемина. Постулатъ, предложенный Нассиръ-Эдиномъ взамѣнъ V-го Эвклидова, нѣсколько громоздокъ, но достаточно нагляденъ: «если изъ двухъ прямыхъ одна перпендикулярна къ сѣкущей, а другая наклонна къ ней, то послѣдняя приближается къ первой со стороны остраго угла и удаляется со стороны тупого угла». Это допущеніе даетъ Нассиръ-Эдину возможность доказать слѣдующія теоремы:

I. *Существуетъ прямоугольникъ* (т.-е. четыреугольникъ съ 4-мя прямыми углами) *съ даннымъ основаніемъ и данной высотой*.

Чтобы построить такой прямоугольникъ, возставляемъ изъ концовъ A и B (см. черт.) даннаго основанія перпендикуляры и откладываемъ $AA'=BB'$=данной высотѣ. Теперь, $\angle A'$ не можетъ быть ни острымъ ни тупымъ—въ противномъ случаѣ, согласно сдѣланному Нассиръ-Эдиномъ допущенію, было бы $BB'<AA'$ или $BB'>AA'$. Итакъ $\angle A'$—прямой.



Черт. 2.

Совершенно такъ же доказывается, что и $\angle B'$ прямой.

II. *Сумма угловъ прямоугольнаго треугольника равна 2d.*

Дѣйствительно, прямоугольный треугольникъ ABA' (черт. 2)

можетъ быть дополненъ до прямоугольника $ABB'A'$, откуда и вытекаетъ справедливость теоремы.

III. *Сумма угловъ всякаго треугольника равна 2d.*

Разбиваемъ данный треугольникъ высотой на два прямоугольныхъ, послѣ чего доказательство не представляетъ затрудненій.

IV. *Перпендикуляръ и наклонная къ одной и той же прямой пересѣкаются.*

Это доказательство сложнѣе и потому мы его здѣсь приводить не будемъ. Укажемъ только, что оно имѣетъ много общаго съ разсужденіями Гемина и точно такъ же опирается на постулатъ Архимеда.



Джонъ-Валлисъ.
(1616—1703).

Заслуга Нассиръ-Эдина состоитъ между прочимъ въ томъ, что онъ подчеркнулъ тѣсную взаимную связь, существующую между постулатомъ Эвклида и предложеніемъ о суммѣ угловъ треугольника.

Въ теченіе нѣсколькихъ послѣдующихъ вѣковъ критическая мысль геометровъ какъ бы изсякаетъ; даже эпоха Возрожденія не приноситъ ничего примѣчательнаго. Второстепенные ученые занимаются V постулатомъ и варіируютъ разсужденія Посидонія, Прокла и Нассиръ-Эдина. Идея «равноотстоящихъ прямыхъ», прежде чѣмъ сойти съ математическаго горизонта, получаетъ любопытное развитіе у итальянскаго геометра *Джордано Витале* (XVII в.). Послѣдній сводитъ къ минимуму тѣ допущенія, которыя мы дѣлаемъ, принимая опредѣленіе Посидонія. Оказывается, что достаточно допустить существованіе *трехъ точекъ*, лежащихъ на одной прямой и равноотстоящихъ отъ нѣкоторой другой прямой, чтобы опредѣленіе Посидонія стало законнымъ.

Другая оригинальная трактовка вопроса принадлежитъ современнику Витале, одному изъ творцовъ анализа безконечно-малыхъ, *Валлису*. Валлисъ обратилъ вниманіе на то, что, отказываясь отъ V постулата, мы должны были бы отказаться отъ теоріи подобія треугольниковъ. Если мы допускаемъ, что можно произвольно измѣнить размѣры треугольника, не мѣняя его формы (т.-е. угловъ)—мы тѣмъ самымъ принимаемъ постулатъ Эвклида. Поэтому Валлисъ предлагаетъ, отбросивъ V постулатъ, расширить содержаніе другого Эвклидова постулата, именно III-го, который состоитъ въ слѣдующемъ: «около всякаго центра можно описать окружность любого радіуса». Постулатъ этотъ устанавливаетъ принципъ подобія для круговъ (такъ какъ всѣ окружности подобны между собою)—остается распространить этотъ принципъ и на другія фигуры.

Прежде, чѣмъ закончить эту главу, и перейти къ изложенію трудовъ тѣхъ геометровъ, которые непосредственно подготовили появленіе не-Эвклидовой геометріи, остановимся еще на нѣкоторыхъ замѣчательныхъ попыткахъ доказать Эвклидовъ постулатъ, попыткахъ, хотя и принадлежащихъ *по времени* къ другому періоду въ исторіи основаній геометріи, но *по духу* близкихъ именно къ старымъ изслѣдованіямъ. Близость эта сказывается прежде всего въ твердомъ стремленіи *доказать* Эвклидовъ постулатъ, въ непониманіи болѣе глубокой сущности вопроса.

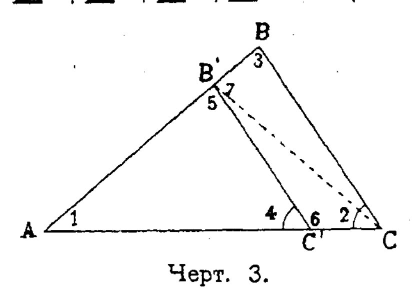
Сюда слѣдуетъ отнести прежде всего многочисленныя доказательства *Лежандра* (1752—1833), извѣстнаго математика и автора учебниковъ элементарной геометріи, дѣйствительно составившихъ эпоху въ тогдашней педагогической литературѣ. Впрочемъ, самая многочисленность доказательствъ служитъ оправданіемъ автора, очевидно понимавшаго, что ни одно изъ нихъ вполнѣ не убѣдительно. Приводимъ два наиболѣе интересныхъ доказательства:

I. Лежандръ предварительно доказываетъ (безъ помощи V-го постулата) слѣдующія двѣ важныя теоремы: 1) сумма угловъ треугольника не можетъ быть больше $2d$ и 2) еслибы въ какомъ нибудь треугольникѣ сумма угловъ оказалась меньше $2d$, то это имѣло бы мѣсто и для всякаго другого треугольника.

Затѣмъ Лежандръ разсуждаетъ такъ. Пусть у тр-ка ABC (черт. 3)—а значитъ и у всѣхъ вообще треугольниковъ—сумма

угловъ меньше $2d$. Взявъ на сторонѣ AC произвольную точку C', строимъ $\angle AC'B' = \angle ACB$. Обозначая углы цифрами, имѣемъ: $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 = 4d$ (двѣ пары смежныхъ угловъ) и

$$\angle 2 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 7 < 4d,$$



Черт. 3.

такъ какъ четыреугольникъ $BCC'B'$ разбивается діагональю на 2 треугольника, въ каждомъ изъ которыхъ сумма угловъ, по предположенію, меньше $2d$. Отсюда слѣдуетъ, что $\angle 4 + \angle 5$ больше, чѣмъ $\angle 2 + \angle 3$, а такъ какъ, по построенію, $\angle 2 = \angle 4$, то $\angle 5$ больше $\angle 3$.

Итакъ, если мы будемъ передвигать сторону BC справа налѣво, оставляя уголъ C неизмѣннымъ, то уголъ (B) при вершинѣ будетъ измѣняться совершенно опредѣленнымъ образомъ, именно увеличиваться. Слѣдовательно, $\angle B$ есть совершенно опредѣленная функція основанія $AC = b$ и угловъ A и C, т.-е.

$$B = f(b,\ A,\ C).$$

Рѣшая это уравненіе относительно b, найдемъ, что

$$b = \varphi(A,\ B,\ C),$$

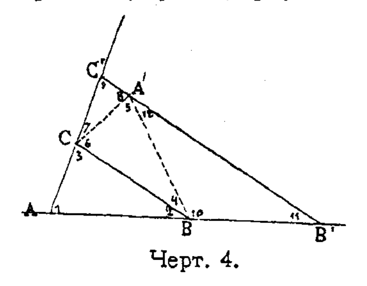
т.-е. что сторона треугольника есть функція трехъ его угловъ, слѣд. она вполнѣ опредѣляется этими углами. Лежандръ считаетъ этотъ результатъ абсурднымъ, потому что, какъ утверждали многіе тогдашніе математики, «не можетъ линейная величина опредѣляться одними только углами». Несмотря на то, что для этого утвержденія было придумано даже громкое названіе: «принципъ однородности»—въ немъ нѣтъ ничего обязательнаго. Къ этому вопросу мы еще вернемся, а пока замѣтимъ, что «принципъ однородности» находится въ тѣсномъ родствѣ съ «постулатомъ подобія», выставленнымъ Валлисомъ.

II. Другое доказательство Лежандра основывается уже на явномъ постулатѣ (который дѣйствительно можетъ быть принятъ вмѣсто Эвклидова): «черезъ любую точку, взятую внутри угла, можно провести прямую, пересѣкающую обѣ стороны угла».

Сдѣлавъ это допущеніе, предположимъ опять, что въ треугольникахъ сумма угловъ всегда *меньше* $2d$, т. е. что

$$2d = \angle A + \angle B + \angle C + \delta,$$

гдѣ δ положительная величина, которую условимся называть *дефицитомъ* даннаго треугольника. Построимъ (черт. 4) треугольникъ $A'BC$, симметричный (относительно прямой BC), а, слѣд., и равный треугольнику ABC. Черезъ точку A' проведемъ (согласно принятому постулату) прямую, пересѣкающую стороны угла A въ точкахъ B' и C'. Обозначая углы цифрами; имѣемъ:



Черт. 4.

$$2d - (\angle 2 + \angle 4 + \angle 10) = 0,\ 2d - (\angle 3 + \angle 6 + \angle 7) = 0,$$
$$2d - (\angle 8 - \angle 5 - \angle 12) = 0.$$

Складывая эти равенства, прибавляя къ обѣимъ частямъ по $(2d - \angle 1 - \angle 9 - \angle 11)$ и производя группировку членовъ, находимъ:

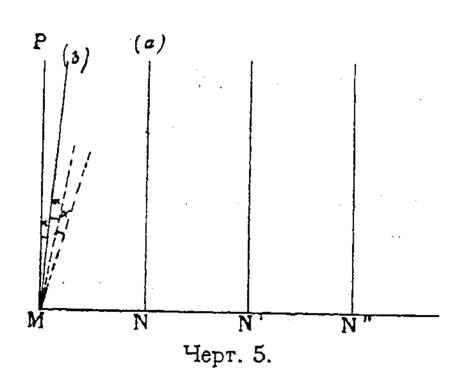
$$2d - (\angle 1 + \angle 9 + \angle 11) = [2d - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3)] +$$
$$+ [2d - (\angle 4 + \angle 5 + \angle 6)] + [2d - (\angle 7 + \angle 8 + \angle 9)] +$$
$$+ [2d - (\angle 10 + \angle 11 + \angle 12))].$$

Другими словами, дефицитъ треугольника $AB'C'$ равенъ суммѣ дефицитовъ 4-хъ треугольниковъ ABC, $A'BC$, $A'CC'$ и $A'BB'$. Но, въ силу равенства треугольниковъ ABC и $A'BC$, у нихъ одинъ и тотъ же дефицитъ δ. Слѣдовательно, дефицитъ треугольника $AB'C'$ больше, чѣмъ 2δ. Но къ $\triangle AB'C'$ можно примѣнить то же построеніе, что и къ $\triangle ABC$,—въ результатѣ получится $\triangle$-къ съ дефицитомъ, бо́льшимъ чѣмъ 4δ. Повторивъ эту операцію n разъ, получимъ тр-къ съ дефицитомъ, превосходящимъ $2^n.\delta$. Отсюда слѣдуетъ, что мы можемъ построить тр-къ съ какимъ угодно большимъ дефицитомъ, что явно абсурдно, такъ какъ дефицитъ, въ силу своего опредѣленія, всегда остается меньше $2d$. Слѣдовательно, наше допущеніе не вѣрно, и сумма угловъ треугольника равна $2d$.

Ко времени Лежандра относятся и первыя попытки примѣнить къ теоріи параллельныхъ основныя понятія анализа без-

конечно-малыхъ. Здѣсь наиболѣе остроумныя доказательства принадлежатъ мало-извѣстному математику *Бертрану* изъ Женевы (конецъ XVIII в.). Мы приведемъ два изъ этихъ доказательствъ въ изложенiи Бертрана, а затѣмъ постараемся выяснить, въ чемъ кроется тамъ ошибка.

I. Доказывается, что перпендикуляръ и наклонная къ одной и той же прямой пересѣкаются. Пусть (a)—перпендикуляръ и (b)—наклонная къ прямой MN (черт. 5); изъ точки M возставимъ перпендикуляръ MP къ прямой MN, и пусть уголъ между этимъ перпендикуляромъ и наклонной (b) будетъ α. Какъ бы малъ ни былъ этотъ уголъ, онъ составляетъ *конечную* часть прямого угла, такъ что, повторивъ уголъ α слагаемымъ конечное число разъ—положимъ 1000 разъ—мы превзойдемъ прямой уголъ (постулатъ Архимеда въ примѣненiи къ угламъ) и будемъ имѣть



Черт. 5.

$\alpha > {}^1/_{1000}\, d$. Съ другой стороны, отложимъ на прямой MN рядъ отрѣзковъ $NN' = N'N'' = \ldots = MN$; возставивъ изъ точекъ $N', N'', \ldots$ перпендикуляры къ MN, получимъ рядъ безконечно-длинныхъ полосъ, заключающихся между этими перпендикулярами, и помѣщающихся въ предѣлахъ прямого угла PMN''. Такихъ одинаковыхъ полосъ мы можемъ построить сколько угодно, напр. больше 1000, и тогда—заключаетъ Бертранъ—часть плоскости, представляемая каждой полосой, будетъ меньше ${}^1/_{1000}\, d$. Отсюда можно заключить, что уголъ α, который $> {}^1/_{1000}\, d$, не можетъ умѣститься въ предѣлахъ одной такой полосы; наклонная (b) должна выйти изъ этой полосы и, слѣдовательно, должна пересѣчь перпендикуляръ (a). На языкѣ безк.-малыхъ предыдущее разсужденiе излагалось такъ: уголъ α есть величина того же порядка, что и прямой уголъ, а полоса—безк.-малая по отношенiю къ прямому углу, слѣдов., полоса меньше угла α и т. д.

II. Бертранъ доказываетъ, что сумма угловъ треугольника

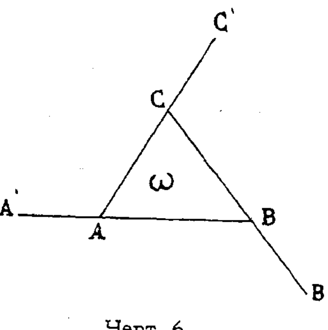
равна $2d$. Продолжимъ стороны треугольника ABC въ одномъ и томъ же направленіи, какъ показано на черт. 6. Тогда

$$A=2d-\angle A'AC'$$
$$B=2d-\angle B'BA'$$
$$C=2d-\angle C'CB',$$

откуда $\angle A+\angle B+\angle C=6d-(\angle A'AC'+\angle B'BA'+$ $+\angle C'CB')$ . . . . (1)

Но углы $A'AC'$, $B'BA'$ и $C'CB'$ покрываютъ всю плоскость, кромѣ площади ABC, величину которой означимъ черезъ ω. А такъ какъ плоскость можно покрыть вполнѣ четырьмя прямыми углами, то

$$\angle A'AC'+\angle B'BA'+\angle C'CB'=4d-\omega$$



Черт. 6.

Но конечная площадь ω является безконечно-малой по сравненію съ величиной всей плоскости, а безконечно-малыя, по мнѣнію тогдашнихъ математиковъ, можно отбрасывать, если онѣ входятъ въ уравненіе, содержащее конечныя величины. Итакъ, въ уравненіи (1) можно положить сумму, стоящую въ скобкахъ, равной $4d$, послѣ чего получится:

$$\angle A+\angle B+\angle C=2d.$$

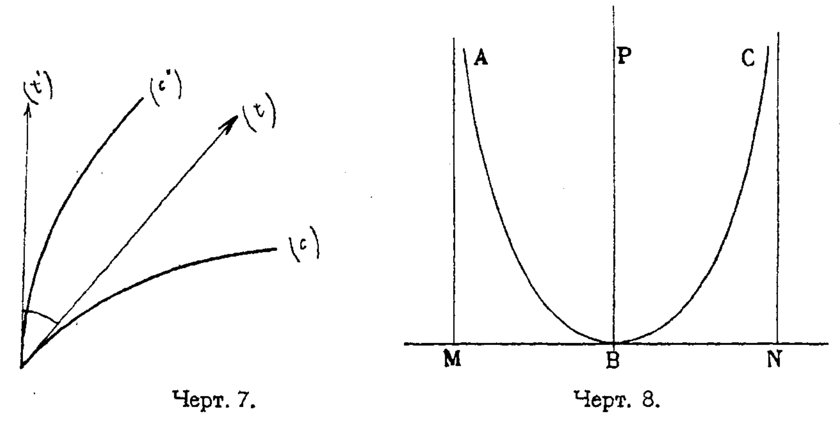
Постараемся разобраться въ этихъ доказательствахъ.

Оба они базируются на совершенно необоснованной трактовкѣ всѣхъ безконечно-протяженныхъ образовъ (угловъ, безконечныхъ полосъ), какъ «величинъ». Современная наука установила слѣдующій взглядъ на понятіе о «величинѣ»: если мы хотимъ количественно сравнивать нѣкоторыя вещи, то прежде всего для всей совокупности этихъ вещей долженъ быть установленъ признакъ, въ силу котораго изъ двухъ данныхъ вещей первая всегда окажется либо равна, либо больше, либо меньше второй *). Такъ, напр.,

*) Мы привели здѣсь только одно требованіе, безъ котораго количественное сравненіе вещей *незаконно*. Но для того, чтобы такое сравненіе было кромѣ того и *цѣлесообразно*, требуется обыкновенно еще выполненіе нѣкоторыхъ добавочныхъ условій. Напр., комплексныя числа не принято

уголъ образуемый двумя полупрямыми, исходящими изъ одной точки, можно разсматривать, какъ величину — послѣ того, какъ установленъ общеизвѣстный способъ сравненія угловъ путемъ наложенія (совмѣщаютъ вершины угловъ и т. д.); способъ этотъ всегда приводитъ къ одному изъ трехъ поименованныхъ результатовъ. Бертранъ не даетъ способовъ сравненія разсматриваемыхъ имъ образовъ, т.-е. угловъ и полосъ, а потому разсужденія его не имѣютъ силы.

Посмотримъ на вопросъ съ другой стороны. Въ высшей математикѣ часто разсматриваются такъ называемые «криволинейные углы», т.-е. углы, образуемые пересѣченіемъ кривыхъ линій. Подъ угломъ между кривыми (c) и (c') разумѣютъ (черт. 7), *по опредѣленію*, уголъ между касательными (t) и (t'), проведенными къ этимъ кривымъ въ общей ихъ точкѣ. Въ частности, одна



Черт. 7. Черт. 8.

изъ линій (c) и (c') можетъ оказаться прямою—это выразится въ томъ, что она сольется со своей касательной. Въ силу этого, опредѣленія, если (черт. 8) кривая ABC касается въ точкѣ B прямой MN, а прямая $BP \perp MN$, то криволинейные (собственно полу-криволинейные, такъ какъ одна изъ сторонъ—прямая), углы ABP и CBP равны каждый прямому *). Но кривая ABC

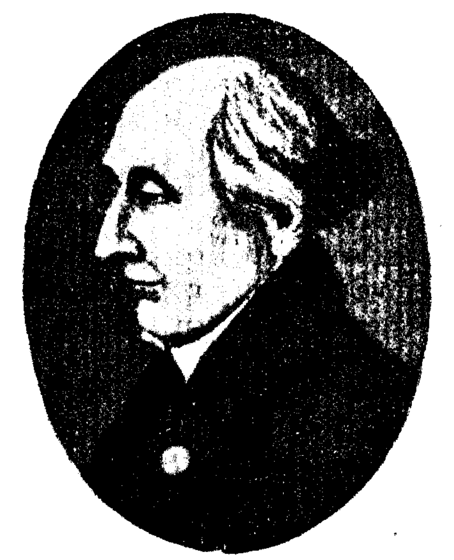
сравнивать по величинѣ—и это вовсе не потому, что нельзя придумать признака сравненія, удовлетворяющаго указанному въ текстѣ требованію. Признаковъ можно придумать сколько угодно, но всѣ они оказываются безплодными для дальнѣйшихъ примѣненій.

*) Поэтому говорятъ часто, что нормаль (у насъ BP) «перпендикулярна» къ кривой (ABC).

можетъ цѣликомъ помѣщаться между двумя параллельными ассимптотами, какъ это изображено на чертежѣ. Получается абсурдный — съ точкѣ зрѣнія Бертрана — результатъ, что два прямыхъ угла помѣщаются внутри полосы. Бертранъ, будь онъ послѣдователенъ, долженъ былъ бы объявить незаконнымъ общепринятое уже въ то время опредѣленіе криволинейнаго угла.

Второе доказательство Бертрана присоединяетъ къ недостаткамъ перваго еще пресловутое «отбрасываніе безконечно-малыхъ». Это именно тотъ пріемъ разсужденія, который составлялъ слабое мѣсто первыхъ аналитиковъ, и который теперь замѣненъ точной терминологіей теоріи предѣловъ.

Къ концу XVIII вѣка широкіе математическіе круги научились уже относиться съ особой осторожностью къ различнымъ теоріямъ параллельныхъ линій. По мнѣнію Даламбера, Эвклидовъ постулатъ составлялъ «скандалъ въ области основаній геометріи». Разсказываютъ, что *Лагранжъ* представилъ уже было Парижской Академіи собственную теорію параллельности, но во время устнаго доклада вдругъ прервалъ изложеніе и сошелъ съ каѳедры со словами: «Мнѣ надо еще объ этомъ подумать!» Думалъ ли авторъ этого историческаго восклицанія, что окончательное разрѣшеніе вопроса было уже не за горами, что оно исподволь подготовлялось нѣсколькими оригинальными, хотя и не всегда популярными, мыслителями?



Жозефъ Лагранжъ.
(1736—1813).

Чтобы заняться послѣдними, мы должны будемъ вернуться хронологически назадъ.

Подготовка и открытіе не-Эвклидовой геометріи.

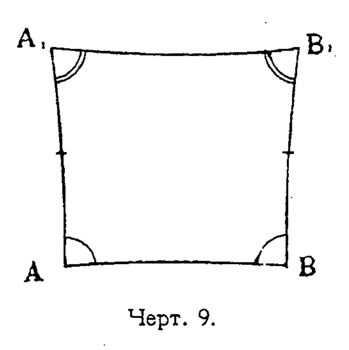
Для непредубѣжденныхъ изслѣдователей V-го постулата давно уже намѣчался путь, идя по которому можно было ожидать рѣшающихъ результатовъ; это—*разсужденіе отъ противнаго:* надо было отвергнуть V-ый постулатъ (или какой-нибудь изъ равносильныхъ ему), замѣнивъ его противоположнымъ предложеніемъ, а затѣмъ постараться сдѣлать возможно большее число разнообразныхъ выводовъ изъ такой видоизмѣненной системы предпосылокъ. Если V-й постулатъ дѣйствительно представляетъ собою слѣдствіе остальныхъ предпосылокъ, то мы вправѣ ожидать, что одинъ изъ упомянутыхъ выводовъ окажется абсурднымъ; тогда его абсурдность и будетъ строгимъ доказательствомъ Эвклидова постулата.

Правда, отсутствіе абсурдности — какъ бы далеко мы не зашли въ своихъ выводахъ — не можетъ еще служить доказательствомъ того, что постулатъ, противоположный V-му, пріемлемъ: быть-можетъ, онъ все-таки противорѣчитъ остальнымъ предпосылкамъ, но противорѣчіе *пока* еще не обнаружилось (вѣдь всѣхъ возможныхъ выводовъ никогда исчерпать не удастся). Однако, мы видѣли, что отъ этого упрека не была свободна и Эвклидова геометрія; поэтому представлялось очень важнымъ выяснить: до какихъ же предѣловъ можетъ быть развита геометрія, построенная на всѣхъ предпосылкахъ, кромѣ V-го постулата, и на отрицаніи этого послѣдняго?

Первая серьезная попытка въ этомъ направленіи принадлежитъ итальянскому іезуиту *Саккери* (1667 — 1733). Саккери исходитъ изъ разсмотрѣнія 4-угольника AA_1B_1B (черт. 9*), въ которомъ углы A и B при нижнемъ основаніи прямые, и $AA = BB_1$. Легко доказать, что углы A_1 и B_1 при верхнемъ основаніи равны между собою (для этого достаточно наложить 4-угольникъ ABB_1A_1 на самаго себя другой стороной). Опираясь на Эвклидовъ постулатъ, мы могли бы доказать, что оба угла A_1 и B_1

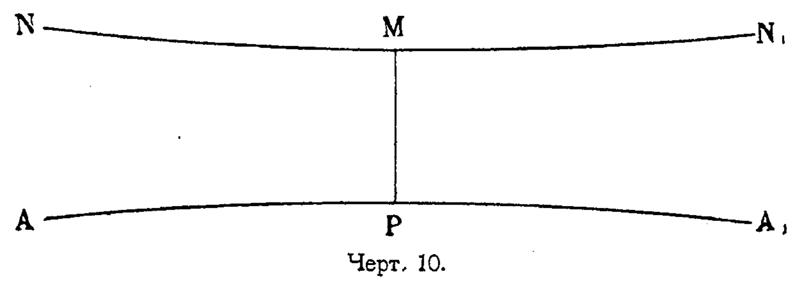
*) Этотъ и большинство послѣдующихъ чертежей исполнены умышленно неправильно: это дѣлается для того, чтобы мы могли отрѣшиться отъ привычныхъ геометрическихъ представленій и сосредоточились на логической сторонѣ разсужденій. Такіе неправильные чертежи обычно встрѣчаются въ доказательствахъ отъ противнаго.

прямые (т.-е. фигура ABB_1A_1 — прямоугольникъ). Но Саккери этого постулата не принимаетъ, и потому для него на первыхъ порахъ одинаково допустимы три предположенія: углы A_1 и B_1 1) тупые, 2) прямые и 3) острые. Эти три предположенія онъ называетъ соотвѣтственно «гипотезами 1) тупого, 2) прямого и 3) остраго угла». Исходя поочередно изъ этихъ трехъ гипотезъ, Саккери съ большимъ искусствомъ развиваетъ соотвѣтствующія слѣдствія. Оказывается, прежде всего, что, смотря по тому, примемъ ли мы гипотезу тупого, прямого или остраго угла, сумма угловъ $\triangle$-ка будетъ больше, равна или меньше $2d$.



Черт. 9.

Далѣе, Саккери доказываетъ весьма важную теорему: «какъ при гипотезѣ тупого, такъ и при гипотезѣ прямого угла — перпендикуляръ и наклонная къ одной и той же прямой всегда пересѣкаются (т.-е. справедливъ V-й постулатъ)». Приведенный выводъ уничтожаетъ гипотезу тупого угла. Въ самомъ дѣлѣ, получается такая цѣпь умозаключеній: если справедлива гипотеза тупого угла, то справедливъ V-й постулатъ; но если справедливъ послѣдній, то — какъ доказывается въ классической геометріи — четыреугольникъ ABB_1A_1 будетъ прямоугольникомъ, т.-е. $A_1=B_1=d$. Мы пришли такимъ образомъ къ противорѣчію съ нашимъ допущеніемъ, слѣдовательно, гипотеза тупого угла отпадаетъ (сопоставимъ это съ результатомъ, полученнымъ позже Лежандромъ:



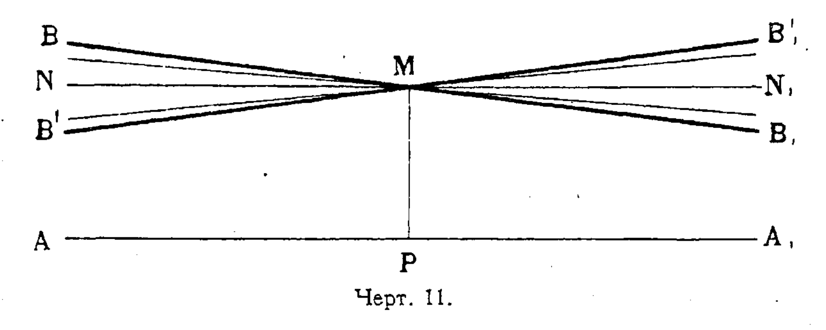
Черт. 10.

сумма угловъ $\triangle$-ка *не превышаетъ* $2d$). Теперь, чтобы обосновать Эвклидову геометрію, Саккери остается еще опровергнуть гипотезу остраго угла. Но это ему никакъ не удается: какъ далеко

Саккери не идетъ, развивая слѣдствія изъ этой гипотезы, — противорѣчія не получается. Вырисовывается такая картина взаимнаго расположенія прямыхъ на плоскости:

1) Черезъ каждую точку M, лежащую внѣ прямой AA_1 (черт. 10) проходитъ болѣе или менѣе тонкій (въ зависимости отъ длины перпендикуляра MP) пучокъ прямыхъ, нигдѣ не пересѣкающихся съ AA_1; этотъ пучекъ ограниченъ двумя прямыми BB_1 и $B'B'_1$ (расположенными симметрично относительно MP), которыя ассимптотически приближаются къ прямой AA_1.

2) Если двѣ прямыя не пересѣкаются, то онѣ либо a) ассимптотически сближаются въ одномъ направленіи и безконечно расходятся въ другомъ (подобно прямымъ BB_1 и AA_1 черт. 10),



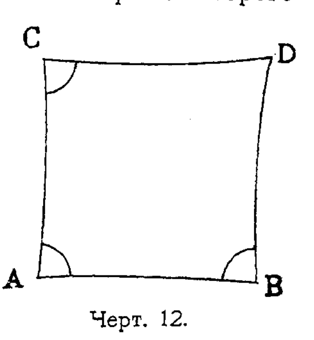
Черт. 11.

либо b) имѣютъ общій перпендикуляръ MP, по обѣ стороны отъ котораго безконечно расходятся. Таковы на черт. 10 прямыя AA_1 и NN_1 (биссектриса угла BMB'), вычерченныя отдѣльно на черт. 11 (прямыя здѣсь нѣсколько искривлены для того, чтобы было яснѣе описываемое ихъ взаиморасположеніе).

Изложенныя свойства прямыхъ линій никакъ не мирятся съ нашими обычными геометрическими представленіями, но *логическаго* абсурда здѣсь нѣтъ. Несмотря на это, Саккери, сумѣвшій подняться до такихъ высотъ абстракціи, отрѣшившійся было отъ всякой «наглядности», — подъ конецъ своего изслѣдованія вдругъ «впадаетъ въ малодушіе» и неожиданно объявляетъ полученныя имъ результаты настолько «противорѣчащими *природѣ* прямыхъ линій», что предлагаетъ отвергнуть и гипотезу остраго угла. Справедливость требуетъ отмѣтить, что, повидимому, Саккери въ глубинѣ души и самъ понималъ разницу между

своимъ отчетливымъ опроверженіемъ гипотезы тупого угла и логически-неубѣдительными аргументами противъ гипотезы остраго. Это видно изъ того, что онъ вторично возвращается къ ней, пытаясь оперировать съ знаменитыми «равноотстоящими линіями», но опять не обнаруживаетъ достаточной рѣшимости и въ довершеніе всего даетъ своему труду мало подходящее заглавіе: «Euclides, ab omni naevo vindicatus»... (Эвклидъ, освобожденный отъ всякаго пятна...)

Непосредственнымъ продолжателемъ изслѣдсваній Саккери слѣдуетъ признать извѣстнаго швейцарскаго математика *Ламберта* (1728 — 1777), хотя вліяніе перваго геометра на второго не установлено. Ламбертъ также исходитъ изъ разсмотрѣнія нѣкотораго 4-угольника, построеннаго такъ: изъ концовъ А и В отрѣзка AB возставляемъ по перпендикуляру; на одномъ изъ нихъ беремъ точку D и опускаемъ перпендикуляръ DC на другой. Получается 4-угольникъ съ тремя прямыми углами A, B и C; что же касается четвертаго угла D, то здѣсь опять возможны гипотезы: 1) тупого, 2) прямого и 3) остраго угла. Опровергнувъ безъ труда первую гипотезу, Ламбертъ обращается къ третьей и здѣсь приходитъ къ выводамъ столь же неожиданнымъ, какъ и Саккери, но уже обнаруживающимъ какую-то подкупающую внутреннюю стройность. Площадь треугольника оказывается *пропорціональной* его «дефициту» (т.-е. разности между $2d$ и суммой угловъ A, B и C труегольника): получается формула



Черт. 12.

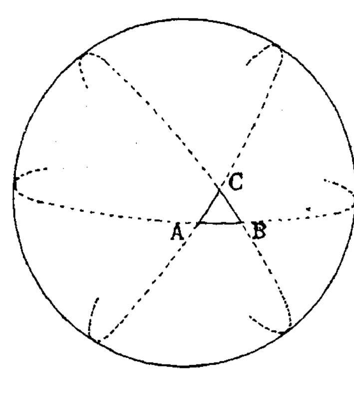
$$\triangle ABC = \rho^2\ (2d - \angle A - \angle B - \angle C), \ldots (1)$$

гдѣ ρ^2 — положительный множитель пропорціональности. Изъ этой формулы вытекаетъ одно замѣчательное слѣдствіе: *площадь треугольника не можетъ возрастать безпредѣльно;* какъ бы мы ни удлиняли стороны $\triangle$-ка, раздвигая его вершины, площадь $\triangle$-ка *всегда будетъ оставаться ниже нѣкоторой границы.*

Что же это за таинственная верхняя граница площадей? Откуда она берется?

Чтобы дать понятіе о томъ, какъ отвѣтилъ на этотъ вопросъ Ламбертъ, прибѣгнемъ къ аналогіи.

Если разсматривать на поверхности шара такъ называемые «сферическіе треугольники», т.-е. криволинейные треугольники, образуемые пересѣченіемъ трехъ большихъ круговъ, то можно установить для этихъ треугольниковъ цѣлый рядъ свойствъ, болѣе или менѣе аналогичныхъ свойствамъ плоскихъ треугольсиковъ; короче—можно развить сферическую геометрію (и тригонометрію). Въ этой геометріи, для каждаго даннаго шара, площадь сферическаго △-ка, очевидно, не можетъ возрастать безпредѣльно: она, напр., не можетъ стать больше, чѣмъ поверхность всего шара. Итакъ, здѣсь на лицо верхняя граница для площадей, но легко видѣть, что она существенно зависитъ отъ *размѣровъ* даннаго шара, отъ его радіуса. Такимъ образомъ существованіе верхней границы площадей въ сферической геометріи обусловлено существованіемъ нѣкоторой *постоянной* (длины), характеризующей каждый шаръ въ отдѣльности.



Черт. 13.

Такъ и Ламбертъ, идя дальше въ своихъ выводахъ, пришелъ къ неожиданному заключенію, что, принявъ гипотезу остраго угла, слѣдуетъ допустить существованіе нѣкоторой длины, характерной для нашего пространства. Въ Эвклидовой геометріи всѣ отрѣзки равноправны и любой изъ нихъ можетъ быть принятъ за единицу длины: вопросъ о цѣлесообразности того или иного выбора системы измѣренія (напр. метрической системы) встаетъ только тогда, когда отъ чистой геометріи мы обращаемся къ ея естественно-научнымъ приложеніямъ. Между тѣмъ у Ламберта выходило, что само пространство какъ бы предписываетъ намъ опредѣленный выборъ единицы длины, выборъ правда необязательный, но наиболѣе цѣлесообразный уже съ точки зрѣнія чистой геометріи, такъ какъ при такомъ выборѣ всѣ формулы

пріобрѣтаютъ наиболѣе простой видъ (подобно тому, какъ формулы обыкновенной тригонометріи упрощаются, когда радіусъ тригонометрической окружности принимается за 1).

По этому поводу Ламбертъ замѣчаетъ: «Въ этомъ (т.-е. въ существованіи «естественной единицы длины») есто что-то соблазнительное, что заставляетъ желать, чтобы гипотеза остраго угла дѣйствительно имѣла мѣсто».

Разъ ставъ на путь сопоставленія геометріи, соотвѣтствующей гипотезѣ остраго угла, со сферической геометріей, Ламбертъ продолжаетъ сравненіе обѣихъ геометрій дальше и здѣсь дѣлаетъ другое замѣчательное открытіе: оказывается, что *если въ формулахъ сферической геометріи замѣнить радіусъ* ρ *сферы чисто-мнимой величиной* ρi (гдѣ $i=\sqrt{-1}$), то получаются формулы, соотвѣтствующія гипотезѣ остраго угла.

Такъ, напр., въ сферической геометріи формула площади треугольника имѣетъ видъ*)

$$\triangle ABC=\rho^2(\angle A+\angle B+\angle C-2d);$$

если замѣнимъ здѣсь ρ на ρi, получимъ формулу (1) Ламберта. «Я почти принужденъ заключить», пишетъ Ламбертъ. «что третья гипотеза (остраго угла) находитъ себѣ примѣненіе на нѣкоторой мнимой сферѣ».

Трудно даже учесть, какую роль сыграло это коротенькое замѣчаніе Ламберта въ дальнѣйшей исторіи не-Эвклидовой геометріи. Ничего не доказывая, оно давало возможность *предугадать* цѣлый рядъ геометрическихъ свойствъ, имѣющихъ мѣсто при гипотезѣ остраго угла, — предугадать именно посредствомъ простого формальнаго преобразованія формулъ сферической геометріи и тригонометріи. Конечно, эти «угаданные» результаты должны были потомъ подвергнуться провѣркѣ прямымъ путемъ, но работа математика именно тогда и бываетъ наиболѣе плодотворна, когда пути изслѣдованія въ новой области открываются при свѣтѣ аналогіи.

---

*) Надо замѣтить, что въ сферической геометріи сумма угловъ $\triangle$-ка *больше* $2d$. Разность $\angle A+\angle B+\angle C-2d$ наз. «сферическимъ избыткомъ» треугольника. Формула въ текстѣ показываетъ, что площадь сферическаго треугольника пропорціональна этому «избытку» (сравн. съ пропорціональностью площади «дефициту» при гипотезѣ остраго угла).

Въ началѣ XIX вѣка въ Германіи появилось сразу нѣсколько изслѣдователей, далеко подвинувшихся по пути, проложенному Саккери и Ламбертомъ. Все это были малоизвѣстные математики, а иногда даже и вовсе не математики; изъ этихъ изслѣдователей укажемъ на преподавателей математики *Вахтера* и *Вольфганга Болiаи*, на сына послѣдняго—австрiйскаго офицера *Iоганна Болiаи*, на юриста *Швейкарта* и на племянника его, безвременно погибшаго юношу *Тауринуса*. Но въ центрѣ этой системы малыхъ планетъ находился самъ princeps mathematicorum (король математиковъ) *Гауссъ*, къ которому всѣ они обращались, какъ къ высшей инстанцiи, и отъ котораго съ трепетомъ ожидали одобренiя или критики своихъ трудовъ.

Изученiе переписки Гаусса съ друзьями, а также и нѣкоторыхъ его бумагъ обнаружили съ несомнѣнностью, что та парадоксальная система, которую Гауссъ сначала называлъ *анти-Эвклидовой*, а потомъ *не-Эвклидовой* геометрiей, была имъ глубоко продумана за 50 лѣтъ научной жизни. Конечно, эта задача была по силамъ такому гиганту математической мысли, но не слѣдуетъ забывать и того упомянутаго выше обстоятельства, что къ Гауссу шли нити отъ всѣхъ его младшихъ товарищей, что съ высоты своего привиллегированнаго положенiя онъ могъ обозрѣвать ихъ разрозненныя попытки. Однако, своихъ изслѣдованiй по не-Эвклидовой геометрiи Гауссъ не опубликовывалъ. Онъ боялся консерватизма академическихъ круговъ («я страшусь крика Беотiйцевъ», писалъ онъ Бесселю въ 1829 г.) и не рѣшался поставить на карту свой уже тогда огромный авторитетъ. Мало того, Гауссъ удерживалъ отъ печатныхъ выступленiй и своихъ болѣе молодыхъ друзей, предостерегая одного изъ нихъ въ слѣдующихъ выраженiяхъ: «...осы, вѣковое гнѣздо которыхъ Вы разрушаете, поднимутся надъ Вашей головой»...

Не имѣя возможности останавливаться здѣсь на трудахъ перечисленныхъ выше молодыхъ германскихъ геометровъ, мы приведемъ только резюме Швейкарта, замѣчательное по содержательности и ясности изложенiя, а затѣмъ посвятимъ нѣсколько словъ трудамъ I. Болiаи, наиболѣе выдающагося изъ этого кружка.

Замѣтку Швейкарта, составленную имъ въ 1818 г. для Гаусса, приводимъ текстуально *).

---

*) Русскiй переводъ заимствованъ изъ книги *Бонола* (см. библiогр. указ.) стр. 62.

«Существуетъ геометрія двухъ родовъ: геометрія въ тѣсномъ смыслѣ слова—геометрія *Эвклида* и геометрія *астральная* («звѣздная»). Въ послѣдней треугольники обладаютъ той особенностью, что сумма трехъ угловъ не равна двумъ прямымъ угламъ.

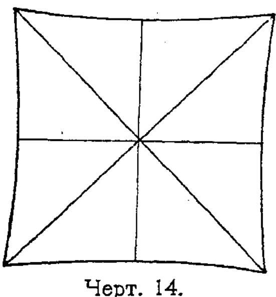
Принявъ это мы можемъ строго доказать:

a) что сумма угловъ треугольника *меньше* двухъ прямыхъ угловъ;

b) что эта сумма будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ площадь треугольника будетъ больше;

c) что высота*) равнобедреннаго треугольника, хотя и возрастаетъ по мѣрѣ того, какъ удлиняются равныя стороны, но тѣмъ не менѣе не можетъ перейти за величину извѣстнаго отрѣзка, которую я называю «*постоянной*».

Квадратъ имѣетъ поэтому форму, указанную на черт. 14.



Черт. 14.

Если этой «постоянной» будетъ у насъ земная полуось (вслѣдствіе чего каждая прямая, проведенная отъ одной неподвижной звѣзды къ другой, отстоящей отъ первой на 90°, будетъ касательной къ земному шару), то она будетъ безконечно-велика по сравненію съ протяженіями, встрѣчающимися въ повседневной жизни.

Эвклидова геометрія будетъ имѣть мѣсто въ предположеніи, что постоянная безконечно-велика. Только тогда оказывается справедливымъ, что сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ угламъ; это можно легко доказать, лишь только мы примемъ за данное, что *постоянная* безконечно-велика.»

По совершенно своеобразному пути пошелъ молодой геометръ *І. Болїаи*, котораго самъ Гауссъ охарактеризовалъ какъ «генія первой величины». Сопоставляя предложенія обычной геометріи съ аналогичными предложеніями не-Эвклидовой, І. Боліаи замѣтилъ, что иногда они допускаютъ обобщеніе, т.-е. такую формулировку, изъ которой легко выводятся то первыя, то вторыя предложенія, смотря по тому, принятъ ли Эвклидовъ постулатъ или противоположный ему. Такія предложенія, доказательство которыхъ не зависитъ отъ постулата Эвклида, І. Боліаи называлъ «абсолютными»**).

---

*) Здѣсь (по крайней мѣрѣ въ томъ текстѣ, которымъ мы воспользовались) не договорено, что рѣчь идетъ о высотѣ равнобедреннаго *прямоугольнаго* треугольника, опущенной на гипотенузу.

**) Конечно, этотъ терминъ имѣетъ весьма «относительное» значеніе, поскольку Эвклидовъ постулатъ не занимаетъ никакого особаго мѣста въ системѣ предпосылокъ геометріи. Этотъ постулатъ, какъ видитъ читатель, имѣлъ дѣйствительно совершенно исключительную *исторію*, но логическая природа его такова же, какъ и у остальныхъ постулатовъ, и съ тѣмъ же основаніемъ можно было бы называть «абсолютными» предложенія, независящія отъ какого-нибудь другого постулата.

Строя свою замѣчательную геометрію, содержащую, какъ показываетъ заглавіе вышедшей въ 1832 г. книги I. Боліаи, «... абсолютно истинную науку о пространствѣ, независящую отъ нерѣшенной еще à priori истинности или ложности XI-й Эвклидовой аксіомы»... этотъ геометръ явился въ извѣстномъ смыслѣ продолжателемъ Эвклида, у котораго, какъ мы знаемъ, первыя 26 теоремъ также не зависятъ отъ постулата о параллельности. Только предложенія I. Боліаи захватываютъ гораздо болѣе широкія области, что могло получиться лишь въ результатѣ глубокаго проникновенія въ природу не-Эвклидовой геометріи.

Чтобы дать представленіе объ этихъ сложныхъ предложеніяхъ абсолютной геометріи приводимъ ниже обобщенную формулировку Пиѳагоровой теоремы. Предварительно условимся относительно слѣдующихъ обозначеній:

1) $\bigcirc R$ означаетъ длину окружности радіуса R.

2) Не предрѣшая вопроса о томъ, какой линіей представляется геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ, (напр. на разстояніе d) отъ данной прямой (R) и лежащихъ по одну сторону отъ послѣдней, мы можемъ все-таки установить нѣкоторыя («абсолютныя») свойства такой «линіи равныхъ разстояній». Совершенно такъ же, какъ доказывается въ элементарной геометріи пропорціональность дугъ окружности центральнымъ угламъ, мы могли бы легко доказать, что отрѣзки «линіи равныхъ разстояній» пропорціональны своимъ проекціямъ на прямую R, и что отношеніе длины такого отрѣзка къ длинѣ его проекціи можетъ зависѣть только отъ разстоянія d; обозначимъ это отношеніе символомъ $E(d)$. Въ Эвклидовой геометріи «линіей равныхъ разстояній» служитъ прямая, параллельная R; отрѣзки «линіи равныхъ разстояній» равны здѣсь своимъ проекціямъ, и слѣд., $E(d)=1$ при всякомъ d. Если теперь въ прямоугольномъ тр-кѣ обозначимъ гипотенузу черезъ c, катеты черезъ a и b, то «абсолютная» Пиѳагорова теорема, оказывается, имѣетъ слѣд. видъ:

$$(\bigcirc a)^2[E(a)+E(b)E(c)]+(\bigcirc b)^2[E(b)+E(c)E(a)]=$$
$$=(\bigcirc c)^2[E(c)+E(a)E(b)].$$

Въ Эвклидовой геометріи, $\bigcirc a = 2\pi a$, $\bigcirc b = 2\pi b$, $\bigcirc c = 2\pi c$, $E(a) = E(b) = E(c) = 1$; подставляя эти величины въ предыдущее равенство и сокращая затѣмъ на $8\pi^2$, получимъ:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

т.-е. общеизвѣстную теорему Пиѳагора, которая представляетъ собою такимъ образомъ частный случай болѣе общаго предложенія.

Въ изслѣдованіяхъ І. Боліаи есть еще очень много интереснаго. Такъ, онъ показалъ, что вся сферическая геометрія и тригонометрія «абсолютны», т.-е. могутъ быть развиты безъ помощи Эвклидова постулата; что въ не-Эвклидовой геометріи возможна квадратура круга обычными средствами и т. д. Къ сожалѣнію, научной работѣ этого оригинальнаго мыслителя мѣшалъ его подозрительный и болѣзненно-самолюбивый характеръ. Такъ, онъ заподозрѣлъ Гаусса въ намѣреніи выдать его, Боліаи, открытія за свои, — и это нелѣпое подозрѣніе настолько вывело изъ равновѣсія молодого ученаго, что онъ оставилъ свои плодотворныя изслѣдованія и неожиданно вновь принялся за неблагодарную задачу — *доказательства* Эвклидова постулата. Нѣсколько позже, ознакомившись съ трудами Лобачевскаго, Боліаи, вмѣсто того, чтобы привѣтствовать своего геніальнаго единомышленника, пытался опровергнуть его систему.

Въ то время, какъ идеи не-Эквилидовой геометріи такими робкими зигзагами пролагали себѣ путь на Западѣ, твердое и независимое слово въ защиту новаго ученія раздалось съ той стороны, откуда его менѣе всего ожидали; изъ глубинъ «полуварварской» — по тогдашней европейской мѣркѣ — Россіи, и даже не изъ центровъ ея умственной жизни, а изъ скромнаго провинціальнаго городка Казани.

Молодой казанскій профессоръ *Николай Ивановичъ Лобачевскій* (род. 1794 г., ум. 1856) уже на первыхъ шагахъ своей ученой дѣятельности сталъ задумываться надъ тѣмъ, «что никакая математическая наука не должна бы начинаться съ такихъ темныхъ понятій, съ какихъ, повторяя Эвклида, начинаемъ мы геометрію,

и что нигдѣ въ математикѣ нельзя терпѣть такого недостатка строгости, какой принуждены были допустить въ теоріи параллельныхъ линій».

Сообразно съ этимъ убѣжденіемъ, работы Лобачевскаго шли въ двухъ направленіяхъ; съ одной стороны онъ стремился дать болѣе научныя опредѣленія основныхъ геометрическихъ понятій— поверхности, линіи, угла и т. д. *); съ другой — и въ этомъ главная его заслуга, онъ пролилъ новый свѣтъ на теорію параллельныхъ линій и на природу нашихъ геометрическихъ понятій. Подобно тому, какъ зародышъ животнаго въ теченіе короткаго времени продѣлываетъ въ миніатюрѣ всю сложную тысячелѣтнюю эволюцію своихъ предковъ, такъ умъ Лобачевскаго прошелъ въ нѣсколько лѣтъ главнѣйшіе этапы мысли своихъ предшественниковъ. Въ лекціяхъ, читанныхъ двадцатилѣтнимъ профессоромъ между 1815 и 1817 г.г., Лобачевскій то пытается доказать V постулатъ, слѣдуя Лежандру, то хочетъ обойти трудность посредствомъ такого наивнаго опредѣленія: «Если двѣ линіи AB и CD простираются въ одну сторону, т.-е. по одинаковому направленію, то онѣ нигдѣ сойтись не могутъ. Таковыя линіи называются параллельными».



Николай Ивановичъ Лобачевскій.
(1794—1856).

Въ 1823 г. Лобачевскій составляетъ учебникъ геометріи, гдѣ постулатъ Эвклида сопровождается слѣдующимъ замѣчаніемъ: «Строгаго доказательства сей истины до сихъ поръ не могли

*) Между прочимъ, Лобачевскій *первый* далъ научное опредѣленіе длины кривой, какъ предѣла периметровъ вписанныхъ ломанныхъ. Однако, это опредѣленіе вошло въ обиходъ позже, черезъ французскаго математика *Каталана*, которому оно обыкновенно и приписывалось.

сыскать; какія были даны, могутъ называться только поясненіями, но не заслуживаютъ быть почтены въ полномъ смыслѣ математическими доказательствами». Наконецъ въ 1826 г. Лобачевскій представилъ Казанскому Физико-Математическому факультету докладъ подъ названіемъ «Exposition succinte des principes de la Géométrie» («Краткое изложеніе принциповъ геометріи»; въ то время русскіе ученые часто излагали свои труды на иностранныхъ языкахъ, какъ вслѣдствіе несовершенства русской терминологіи, такъ и для того, чтобы имѣть большій кругъ читателей). Докладъ этотъ до насъ не дошелъ, но судя по нѣкоторымъ даннымъ, онъ содержалъ уже въ существенныхъ чертахъ всю не-Эвклидову геометрію, такъ что 1826 г. долженъ считаться точной датой открытія Лобачевскимъ его новой геометріи.

Само собой понятно, что докладъ вызвалъ равнодушіе однихъ недовѣріе другихъ и открытую враждебность третьихъ. Молодой ученый остался одинокъ; но онъ не сложилъ оружія, и въ 1829 г. опубликовалъ статью «О началахъ геометріи» — первый печатный трудъ по не-Эвклидовой геометріи.

Это историческое событіе произошло такимъ образомъ — знаменательное совпаденіе! — въ томъ самомъ году, когда Гауссъ написалъ свое извѣстное письмо къ Бесселю (см. выше).

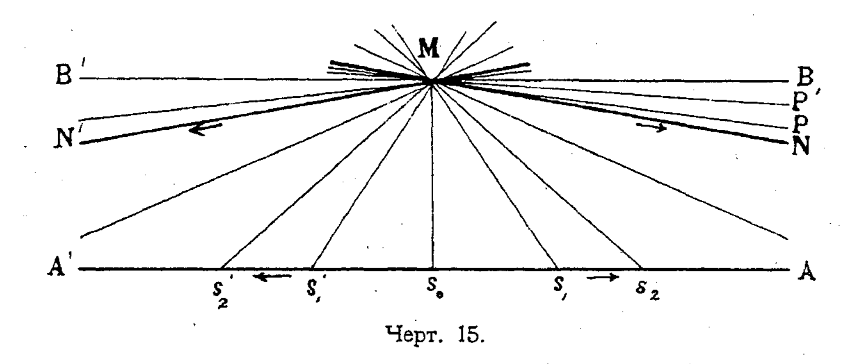
Наконецъ въ $183^5/_6$ г.г. появились два капитальныхъ труда Лобачевскаго: «Воображаемая геометрія», гдѣ изложеніе было преимущественно аналитическое, и «Новыя начала геометріи съ полной теоріей параллельныхъ», гдѣ преобладаетъ чисто-геометрическій элементъ.

Дальнѣйшія сочиненія Лобачевскаго мало прибавляютъ къ перечисленнымъ и характеризуютъ только ту неослабную настойчивость, съ какой Лобачевскій добивался отклика ученаго міра на свои идеи. Постараемся въ немногихъ словахъ выяснить основные моменты въ системѣ Лобачевскаго.

Лобачевскій задается вопросомъ о томъ, что мы можемъ утверждать относительно взаимнаго расположенія прямыхъ на плоскости *до* того, какъ принять постулатъ Эвклида.

Въ противоположность Саккери, изслѣдованіе котораго на этомъ именно пунктѣ обрывается (см. выше), Лобачевскій сразу начинаетъ съ такого разсужденія.

Пусть (черт. 15) $A'A$ прямая, M—точка внѣ ея. Если станемъ разсматривать различныя прямыя (лучше—полупрямыя), проходящія черезъ точку M, то среди нихъ несомнѣнно будутъ



Черт. 15.

такія, которыя пересѣкаютъ прямую $A'A$: таковы, напр., перпендикуляръ MS_0, опущенный изъ точки M, и безчисленное множество прямыхъ, соединяющихъ точку M съ различными точками S'_2, S'_1, S_1, S_2.... прямой $A'A$. Съ другой стороны, мы знаемъ прямую, которая проходитъ черезъ точку M и навѣрное не пересѣкается съ $A'A$: это прямая $B'B$, перпендикулярная къ MS_0. Эвклидовъ постулатъ утверждаетъ, что изъ всѣхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ M, это свойство принадлежитъ *только* прямой $B'B$. Отказываясь отъ этого постулата, Лобачевскій допускаетъ, что черезъ точку M проходятъ еще другія прямыя, не встрѣчающія прямой $A'A$. Если MP есть одна изъ такихъ прямыхъ, то легко видѣть, что всякая прямая MP', проходящая внутри угла PMB, также не встрѣтится съ $A'A$. Съ другой стороны, если возьмемъ какую нибудь прямую, исходящую изъ точки M и пересѣкающую линію $A'A$, напр., прямую MS_2, то всякая прямая, идущая внутри угла S_0MS_2, напр., MS_1, также встрѣтитъ линію $A'A$. При такихъ обстоятельствахъ мы вправѣ утверждать (въ настоящее время это утвержденіе обосновали бы на извѣстномъ принципѣ непрерывности Дедекинда, играющемъ основную роль въ теоріи несоизмѣримыхъ чиселъ), что должна существовать прямая MN, отдѣляющая при точкѣ M прямыя, встрѣчающія полупрямую S_0A, отъ невстрѣчающихъ. Эта прямая MN сама линіи $A'A$ не

встрѣчаетъ и является предѣльнымъ положенiемъ, къ которому стремится (но никогда его не достигаетъ) прямая MS, когда точка S безконечно удаляется вправо по линiи $A'A$. Всѣ эти соображенiя, развитыя нами для правой половины чертежа, примѣнимы — въ силу симметрiи — и къ лѣвой: здѣсь роль пограничной прямой будетъ играть линiя MN' симметричная съ MN относительно перпендикуляра MS_0. *Вотъ эти-то двѣ прямыя MN и MN'*, отдѣляющiя при точкѣ M прямыя, которыя встрѣчаютъ линiю $A'A$, отъ прямыхъ не встрѣчающихъ этой линiи, Лобачевскiй называетъ *параллелями къ прямой $A'A$ въ точкѣ M*. Такимъ образомъ, черезъ каждую точку M, внѣшнюю по отношенiю къ прямой $A'A$, проходятъ двѣ параллели къ этой прямой: право-параллельная и ей симетричная,—лѣво-параллельная. Отсюда видно, что для Лобачевскаго выраженiя «прямыя, лежащiя въ одной плоскости, но не пересѣкающiяся» и «параллельныя прямыя» не синонимы, какъ для Эвклида.

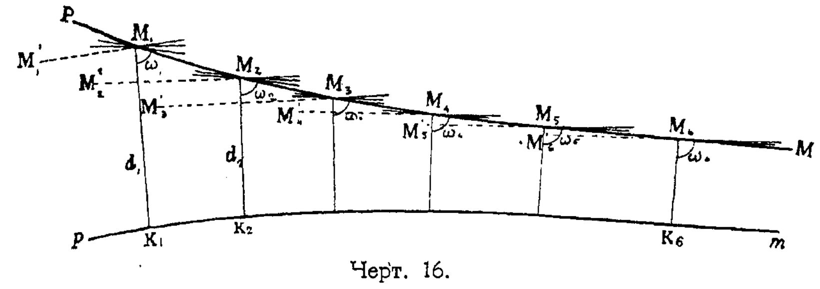
Установивъ эти основныя опредѣленiя, Лобачевскiй задается естественнымъ вопросомъ: если прямая MP параллельна прямой $A'A$ въ точкѣ M, то будетъ ли она параллельна ей и во всякой другой своей точкѣ M', т. е. будетъ ли она и при точкѣ M' отдѣлять прямыя, встрѣчающiя $A'A$, отъ невстрѣчающихъ? *).

Послѣ несложныхъ разсужденiй, отвѣтъ на этотъ вопросъ получается утвердительный, т.-е. если одна прямая параллельна другой въ нѣкоторой точкѣ, то первая прямая параллельна второй на всемъ своемъ протяженiи. Далѣе свойство параллельности оказывается и у Лобачевскаго взаимнымъ: если $MP \parallel A'A$, то и обратно, $A'A \parallel MP$—послѣ чего можно говорить о прямыхъ, *параллельныхъ другъ другу*.

Двѣ взаимно-параллельныя прямыя ассимптотически сближаются въ одномъ направленiи и неограниченно удаляются другъ отъ друга въ противоположномъ. Схема взаимнаго расположенiя такихъ прямыхъ PM и pm изображена на черт. 16; изъ точекъ $M_1, M_2 \ldots M_6 \ldots$ опущены перпендикуляры M_1K_1, $M_2K_2, \ldots M_6K_6 \ldots$ на линiю pm. Прямыя $M_1M'_1$, $M_2M'_2 \ldots M_6M'_6 \ldots$

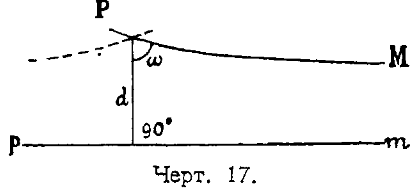
*) При Эвклидовомъ опредѣленiи параллельности такой вопросъ, очевидно, излишенъ, такъ какъ отдѣльныя точки параллельныхъ прямыхъ не играютъ тамъ особой роли.

изображаютъ лѣво-параллельныя къ *pm* и вмѣстѣ съ прямой PM опредѣляютъ при соотвѣтствующихъ точкахъ пучки прямыхъ, не пересѣкающихъ линіи *pm*. Чертежъ показываетъ, что эти



Черт. 16.

пучки становятся все болѣе узкими при передвиженіи вправо по прямой PM. Растворъ каждаго изъ пучковъ, получающихся при точкахъ M, M_2.... зависитъ отъ величины соотвѣтствующихъ угловъ ω_1, ω_2,... — такъ называемыхъ «угловъ параллельности»; послѣдніе въ свою очередь зависятъ отъ длинъ d_1, d_2,... перпендикуляровъ M_1K_1, M_2K_2,.... Лобачевскій изучилъ функціональную зависимость между длиной перпендикуляра d и соотвѣтствующимъ угломъ параллельности ω (черт. 17); эту зависимость онъ обозначалъ такъ



Черт. 17.

$$\omega = \Pi(d)$$

и показалъ, что $\lim\limits_{d=0} \Pi(d) = 90°$, а $\lim\limits_{d=\infty} \Pi(d) = 0$. Обратно, d есть вполнѣ опредѣленная функція отъ ω, которую можно обозначить такъ:

$$d = \Phi(\omega)$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что Лобачевскій не остановился передъ нарушеніемъ пресловутаго «принципа однородности» (см. выше), столь смущавшаго Ламберта и его современниковъ. Правда, въ одной изъ своихъ раннихъ статей Лобачевскій пишетъ: «... мы не въ состояніи постигать, какая бы связь могла существовать въ природѣ вещей и соединять въ ней величины столь разнородныя, каковы линіи и углы. Итакъ, очень вѣроятно, что Эвклидовы положенія одни только истинныя, *хотя и оста-*

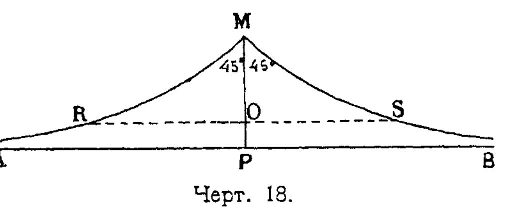
нутся всегда недоказанными...», но изъ подчеркнутыхъ нами словъ и остального текста ясно, что *логической* силы Лобачевскій за «принципомъ однородности» не признавалъ. Тутъ же онъ высказываетъ чрезвычайно цѣнную догадку, что принципъ этотъ опытнаго происхожденія и зависитъ отъ ограниченности той части пространства, въ которой мы производимъ измѣренія; къ этой мысли Лобачевскаго мы еще вернемся.

Попытаемся съ точки зрѣнія изложенныхъ здѣсь основныхъ свойствъ геометріи Лобачевскаго освѣтить глубже два вопроса, ранѣе нами уже затронутыхъ.

Во-первыхъ посмотримъ какой видъ приняло бы въ геометріи Лобачевскаго мнимое доказательство (первое, стр. 16) Бертрана. Если уголъ $90°-\alpha$ (см. черт. 5) меньше угла параллельности, соотвѣтствующаго отрѣзку MN, т.-е. меньше, чѣмъ $\Pi\ (MN)$ то прямая (b) дѣйствительно пересѣкаетъ прямую (a). Но, какъ только уголъ $90°-a$, увеличиваясь, приметъ значеніе $\Pi\ (MN)$,— прямая (b) станетъ параллельна къ (a), т.-е. будетъ приближаться къ ней ассимптотически, оставаясь все время внутри полосы между двумя перпендикулярами. Въ этомъ расположеніи линій такъ же мало парадоксальнаго, какъ и въ изображенномъ на черт. 8.

Второе положеніе, которое мы сумѣемъ теперь точнѣе формулировать, содержится въ замѣткѣ Швейкарта (стр. 27) и относится къ такъ называемой «постоянной».

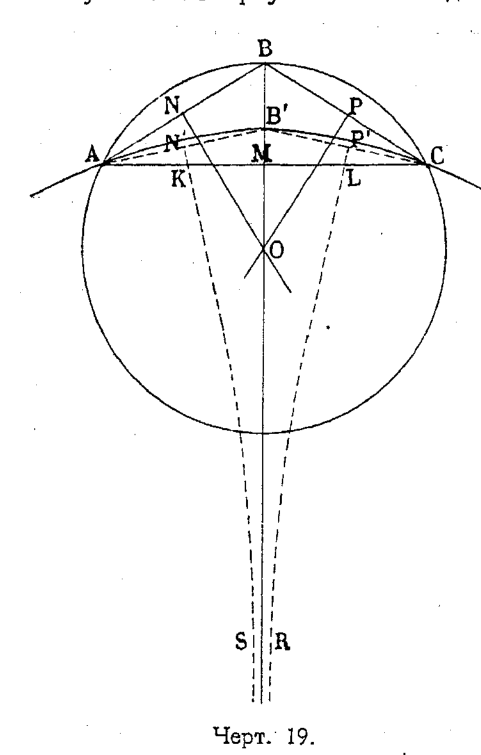
Пусть MS и MR—правая и лѣвая параллели къ прямой AB; $MP \perp AB$; $\angle SMP = \angle RMP = 45°$. Если возьмемъ на отрѣзкѣ MP какую нибудь точку O, то прямая, проведенная черезъ эту точку перпендикулярно къ MP, непремѣнно встрѣтитъ обѣ параллели MR и MS, такъ какъ меньшему отрѣзку соотвѣтствуетъ большій уголъ параллельности (т.-е. болѣе узкій пучекъ непересѣкающихъ прямыхъ), а $MO < MP$. Треугольникъ RMS, очевидно, равнобедренный и прямоугольный ($\angle RMS = 90°$). Если будемъ приближать точку O къ P, то будутъ получаться равнобедренные прямоугольные треугольники съ все бо́льшими высотами; но никогда высота такого треугольника не достигнетъ величины MP, такъ какъ прямыя MR, MS и AB уже не составляютъ треугольника. Объ этомъ и говоритъ Швейкартъ въ своей цитированной выше замѣткѣ. «Постоянная» Швейкарта есть, такимъ образомъ не что иное, какъ отрѣзокъ, соотвѣтствующій углу параллельности въ 45°, т. е. $\Phi(45°)$.



Черт. 18.

Слѣдующимъ основнымъ моментомъ въ изслѣдованіи Лобачевскаго является вопросъ о такъ называемой «предѣльной окружности», т.-е. такой линіи, къ которой приближается окружность, когда радіусъ ея безконечно возрастаетъ. Въ геометріи Эвклида «предѣльной окружностью» служитъ прямая линія; какъ обстоитъ дѣло въ геометріи Лобачевскаго, можно уяснить при помощи слѣдующихъ разсужденій.

Пусть ABC треугольникъ — для простоты возьмемъ равнобедренный $(AB = BC)$ — вписанный въ окружность. Центръ O послѣдней лежитъ на пересѣченіи трехъ перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ срединъ M, N и P сторонъ тр-ка. Будемъ теперь приближать вершину B къ основанію по прямой BM; тогда точка O будетъ удаляться по этой прямой (на нашемъ чертежѣ внизъ). Однако въ Эвклидовой геометріи мы вправѣ утверждать, что три перпендикуляра, опредѣляющіе точку O, всегда будутъ пересѣкаться до тѣхъ поръ, пока точка B не сольется съ точкой M (такъ что треугольникъ ABC уничтожится); въ этомъ случаѣ три перпендикуляра станутъ параллельными между собой, точка O будетъ безконечно-удаленной, и окружность, описанная около тр-ка ABC, превратится въ прямую AC.



Черт. 19.

Не то въ геометріи Лобачевскаго; здѣсь три перпендикуляра перестанутъ пересѣкаться еще до того, какъ вершина B сольется съ точкой M: именно это произойдетъ, когда вершина придетъ въ такое положеніе B', при которомъ $\angle MLR$ $(= \angle MKS)$ станетъ

угломъ параллельности для отрѣзка ML $(=MK)$ *). Окружность, описанная около тр-ка ABC превратится тогда въ нѣкоторую кривую, проходящую черезъ три точки A, B' и C, не лежащія на одной прямой. Вотъ эту-то кривую линію, которая является предѣльной формой для окружности съ безконечно возрастающимъ радіусомъ въ геометріи Лобачевскаго, послѣдній называетъ «*предѣльной круга*» или «*орициклой*». Дальнѣйшее изслѣдованіе показываетъ, что орицикла есть безконечная незамкнутая линія постоянной кривизны, такъ что дугу орициклы можно передвигать вдоль этой линіи безъ деформаціи.

Если вращать орициклу около одной изъ ея нормалей **), то получится нѣкоторая кривая поверхность, которую Лобачевскій называетъ «*предѣльной сферой*» или «*орисферой*». Орисферу можно опредѣлить и самостоятельно — какъ сферу съ безконечно-удаленнымъ центромъ, т.-е. предѣльное положеніе сферы, у которой радіусъ безконечно возрастаетъ. Въ Эвклидовой геометріи орисферой является плоскость. Роль прямыхъ линій на орисферѣ играютъ орициклы; напр., кратчайшее разстояніе двухъ точекъ орисферы (если передвигаться, конечно, по ней самой), есть дуга единственной орициклы, проходящей черезъ эти двѣ точки.

Углубляясь далѣе въ природу геометріи на орисферѣ, Лобачевскій сдѣлалъ замѣчательное открытіе: *геометрія на орисферѣ совпадаетъ съ геометріей* (точнѣе *планиметріей*) *Эвклида*. Это обусловливается тѣмъ, что черезъ каждую точку орисферы проходитъ одна и только одна орицикла, не пересѣкающая другую данную орициклу (т.-е. справедливъ постулатъ Эвклида!). Всю планиметрію Эвклида можно цѣликомъ перенести на орисферу; напр., можно утверждать, что въ прямоугольномъ тр-кѣ, образованномъ пересѣченіемъ трехъ орициклъ, квадратъ «гипотенузы» (т.-е. орициклической дуги, лежащей противъ прямого угла) равенъ суммѣ квадратовъ «катетовъ». Такимъ образомъ планиметрія Эвклида является просто одной изъ главъ въ геометріи Лобачевскаго; послѣдняя оказывается великодушной по отно-

*) Отсюда видно, что въ геометріи Лобачевскаго не черезъ всякія три точки, не лежащія на одной прямой, проходитъ окружность.

**) См. статью «Дифференц. геометрія».

шенію къ своей предшественницѣ, удѣляя и ей уголокъ въ своемъ необъятномъ зданіи. Вмѣстѣ съ тѣмъ получается парадоксальное положеніе: Лобачевскій, отвергнувъ Эвклидовъ постулатъ, тѣмъ самымъ узаконилъ его существованіе, такъ какъ показалъ, что постулатъ этотъ не противорѣчитъ остальнымъ предпосылкамъ.

Въ самомъ дѣлѣ, изгоните этотъ постулатъ съ плоскости, и онъ немедленно появится на орисферѣ! Если бы — допустимъ, такую возможность—люди съ самаго начала создали геометрію не Эвклида, а Лобачевскаго, то они все-же рано или поздно натолкнулись бы и на первую геометрію, которая тогда называлась бы у нихъ «геометріей предѣльной сферы».

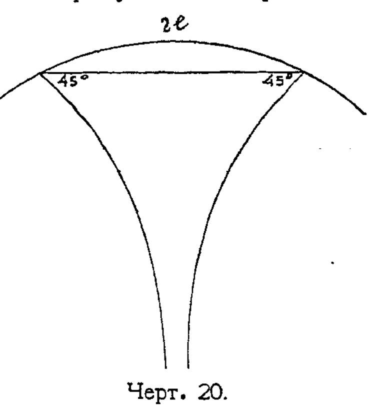
Подчеркнутое выше курсивомъ предложеніе Лобачевскаго является вполнѣ «абсолютнымъ» (въ смылѣ Боліаи): оно справедливо, примемъ ли мы ту или иную геометрію, и вопросъ будетъ только о *формѣ* той поверхности, къ которойэто предложеніе относится; у Эвклида эта поверхность — плоскость, у Лобачевскаго — кривая поверхность.

Открытіе свойствъ орисферы дало Лобачевскому въ руки могущественное орудіе для дальнѣйшаго изслѣдованія. Въ самомъ дѣлѣ, въ его распоряженіи оказалась поверхность, свойства которой человѣчество, само того не подозрѣвая, изслѣдовало на протяженіи тысячелѣтій. Теперь уже было нетрудно развить ту своеобразную тригонометрію, которая имѣетъ мѣсто въ системѣ Лобачевскаго. Не входя въ подробности относительно формулъ этой тригонометріи, отмѣтимъ только общій ихъ характеръ: стороны a, b и c треугольника входятъ сюда не непосредственно, а подъ видомъ тригонометрическихъ функцій (sin, cos, tg,...) отъ угловъ $\Pi(a)$, $\Pi(b)$ и $\Pi(c)$, т-е. угловъ параллельности, соотвѣтствующихъ отрѣзкамъ a, b и c. Поэтому представляется существеннымъ установить связь между функціей $\Pi(x)$ и функціями, обычно разсматриваемыми въ анализѣ. Такая связь дѣйствительно была найдена Лобачевскимъ въ видѣ формулы

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\,\Pi(x) = e^{-\frac{x}{l}} \quad , \ldots\ldots (2)$$

гдѣ l нѣкоторая постоянная величина. Послѣ того, что говорилось объ изслѣдованіяхъ Ламберта и Швейкарта, появленіе постоянной величины въ формулахъ Лобачевскаго не должно, конечно,

казаться неожиданнымъ. Постоянная l имѣетъ вполнѣ опредѣленное геометрическое значеніе: это есть половина такой орициклической дуги, у которой хорда образуетъ съ нормалями, исходящими изъ концовъ дуги, углы въ 45° (см. черт. 20). Лобачевскій принимаетъ величину l за единицу длинъ, что упрощаетъ формулы, какъ это видно уже изъ приведеннаго выше равенства (2). Съ аналитической же точки зрѣнія величина l остается совершенно произвольной, такъ что существуетъ не одно «пространство Лобачевскаго», а безчисленное множество такихъ пространствъ, соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ l. Этому не слѣдуетъ удивляться, если вспомнимъ, что существуетъ напр., безчисленное множество сферъ, отличающихся другъ отъ друга радіусомъ R — однако сферическая геометрія *одна*, и въ формулы ея явно или неявно (когда R принято за 1) входитъ величина R.



Черт. 20.

Изучая формулы своей тригонометріи, Лобачевскій пришелъ къ двумъ важнымъ выводамъ.

1) *Формулы тригонометріи Лобачевскаго* могутъ быть получены изъ формулъ *сферической тригонометріи*, если замѣнить въ послѣднихъ радіусъ R черезъ $l\sqrt{-1}$; однако въ формулы Лобачевскаго мнимая величина $\sqrt{-1}$ не входитъ; она исключается при помощи функціи $\Pi(x)$. Вспомнимъ, что этотъ результатъ былъ уже предвидѣнъ Ламбертомъ.

2) Какова бы ни была постоянная l, *геометрія безконечно-малыхъ въ пространствѣ Лобачевскаго совпадаетъ съ геометріей Эвклида*. Пояснимъ это. Предположимъ, что стороны треугольника весьма малы по сравненію съ величиной l. Если тогда замѣнимъ равенства Лобачевскаго приближенными равенствами, въ которыхъ малыя величины высшихъ порядковъ отброшены, то получимъ равенства Эвклида. Кромѣ того равенства Эвклида получаются изъ равенствъ Лобачевскаго, если положить въ по-

слѣдних $l=\infty$ (вспомнимъ Швейкарта). Напр., приведенное у насъ равенство (1) переходитъ при $l=\infty$ въ равенство:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\, \Pi(x)=1$$

(такъ какъ $e^{-\frac{x}{\infty}}=e^0=1$), откуда $\frac{1}{2}\Pi(x)=45°$, т.-е. $\Pi(x)=90°$, а вѣдь это и характерно для геометріи Эвклида, гдѣ уголъ параллельности всегда равенъ 90^0.

Итакъ геометрія Эвклида является просто *предѣльнымъ* случаемъ геометріи Лобачевскаго.

Но съ другой стороны, та же Эвклидова геометрія является предѣльнымъ случаемъ сферической: вѣдь на сферѣ безконечно-большого радіуса — будетъ ли это плоскость (при гипотезѣ Эвклида) или орисфера (при гипотезѣ Лобачевскаго)—справедлива Эвклидова геометрія. Сводя поэтому въ одно оба предыдущихъ результата, мы можемъ сказать: если радіусъ сферы (возрастая) переходитъ черезъ безконечность въ область мнимыхъ величинъ *), то сферическая геометрія, пройдя черезъ Эвклидову, переходитъ въ геометрію Лобачевскаго.

Когда вся эта стройная картина не-Эвклидовой геометріи развернулась передъ умственнымъ взоромъ Лобачевскаго, у него уже не могло оставаться сомнѣнія въ томъ, что передъ нимъ не простой математическій курьезъ, а новое огромное завоеваніе человѣческой мысли. Теперь уже увѣренной рукой ведетъ онъ дальше корабль изслѣдованія; открываетъ свою особенную аналитическую геометрію; развиваетъ теорію площадей и объемовъ, показываетъ, что послѣдняя, какъ и въ нащей геометріи, приводитъ къ вычисленію интеграловъ (ср. статью «Прилож. инт. исчисл. къ геом.»), только болѣе сложнаго типа; обратно—пользуется полученными геометрическими результатами для того, чтобы вычислить нѣсколько новыхъ интеграловъ, до него неизслѣдованныхъ. Послѣднему обстоятельству Лобачевскій удѣляетъ

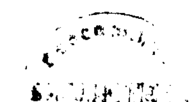
*) Примѣромъ такого измѣненія можетъ послужить простая функція $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Когда x отъ положительныхъ значеній черезъ 0 переходитъ къ отрицательнымъ, то y отъ вещественныхъ значеній, черезъ ∞, переходитъ къ мнимымъ.

исключительное вниманіе. И это вовсе не потому, чтобы онъ придавалъ значеніе вычисленію еще нѣсколькихъ интеграловъ, которые къ тому же могли быть найдены другимъ путемъ. Нѣтъ, цѣль тутъ была другая: Лобаческій надѣялся хоть этимъ пробить ледъ равнодушія своихъ коллегъ-математиковъ; разъ не-Эвклидова геометрія оказывается въ самомъ дѣлѣ полезной въ такой общепризнанной области, какъ интегральное исчисленіе, то не заслуживаетъ ли эта геометрія болѣе серьезнаго отношенія?

Самъ же Лобачевскій гораздо глубже понималъ значеніе своего открытія. Онъ былъ убѣжденъ, что его геометрія не содержитъ внутренняго противорѣчія (во всякомъ случаѣ она *логически-равноправна* съ геометріей Эвклида, такъ какъ развита до тѣхъ же предѣловъ; если ожидать, что противорѣчіе еще вскроется, то вѣроятность этого одинакова по отношенію къ обѣимъ геометріямъ) — слѣдовательно Эвклидовъ постулатъ *недоказуемъ*. Правда, доводы Лобачевскаго нельзя признать—съ точки зрѣнія современнаго состоянія вопроса — безупречными. Но онъ и самъ не считалъ ихъ таковыми, потому что неустанно стремился къ болѣе совершеннымъ, и въ каждомъ новомъ сочиненіи пытался освѣтить вопросъ съ новой стороны. Да иначе и быть не могло: ни одна изъ великихъ математическихъ идей не появлялась на свѣтъ въ логическомъ всеоружіи (вспомнимъ хотя бы анализъ безконечно-малыхъ); было бы совершенно невѣроятнымъ, если бы Лобачевскій, въ довершеніе къ своему колоссальному труду, сдѣлалъ еще то, что послѣ него поддалось только усиліямъ цѣлаго поколѣнія выдающихся математиковъ.

Приведемъ здѣсь наиболѣе цѣнныя изъ общихъ разсужденій Лобачевскаго въ подлинникѣ. Въ статьѣ «О началахъ геометріи» онъ пишетъ: «Послѣ того, какъ мы нашли уравненія, которыя представляютъ зависимость угловъ и боковъ *) треугольника, когда наконецъ дали мы общія выраженія для элементовъ линій, площадей и объемовъ тѣлъ, все прочее въ геометріи будетъ уже аналитикой, гдѣ исчисленія необходимо должны быть согласны между собой и ничего не въ состояніи открыть новаго, чего бы

*) т. е. сторонъ.



не заключалось въ тѣхъ первыхъ уравненіяхъ, откуда должны быть взяты всѣ отношенія геометрическихъ величинъ другъ къ другу. Итакъ, если надобно предполагать теперь, что какое-нибудь противорѣчіе принудитъ впослѣдствіи опровергнуть начала, принятыя нами въ этой новой геометріи, то это противорѣчіе можетъ только заключаться въ самыхъ уравненіяхъ (17) *)...» Далѣе Лобачевскій усматриваетъ отсутствіе противорѣчія въ своихъ уравненіяхъ изъ того, что они связаны простымъ аналитическимъ соотношеніемъ съ уравненіями сферической тригонометріи.

Въ одномъ изъ позднѣйшихъ сочиненій, озаглавленномъ «Пангеометрія» Лобачевскій пишетъ уже скорѣе въ духѣ «абсолютной геометріи»: «Уже одного взгляда на уравненія, которыя выражаютъ**) зависимость угловъ и боковъ прямолинейныхъ треугольниковъ, достаточно, чтобы доказать, что, начиная съ этихъ уравненій, пангеометрія дѣлается вычисленіемъ аналитическимъ, которое замѣняетъ и обобщаетъ аналитическій способъ обыкновенной геометріи... Итакъ, уравненія (4) служатъ основаніемъ геометріи въ самомъ общемъ видѣ, потому что они не зависятъ отъ предположенія, что сумма трехъ угловъ во всякомъ прямолинейномъ треугольникѣ равна двумъ прямымъ».

Какъ бы ни относиться къ этимъ разсужденіямъ Лобачевскаго, несомнѣнно, что они содержатъ въ зачаточномъ состояніи ту самую идею «аналитическаго пространства», которая, какъ увидимъ далѣе, является руководящей въ послѣднихъ изслѣдованіяхъ по основаніямъ геометріи.

Лобачевскій интересуется не только логической, но и практической стороной своей геометріи. Было уже говорено, что для фигуръ, размѣры которыхъ весьма малы по сравненію съ постоянной l, вычисленіе по формуламъ Лобачевскаго даетъ на практикѣ тотъ же результатъ, что и вычисленіе по обычнымъ формуламъ. Лобачевскій допускаетъ, что въ нашемъ пространствѣ имѣетъ мѣсто не Эвклидова, а новая геометрія, и задается вопросомъ, какъ велика должна быть постоянная l для того, чтобы

*) Такъ помѣчены въ цитируемомъ сочиненіи основныя уравненія тригонометріи Лобачевскаго.

**) Въ тригонометріи Лобачевскаго.

данные опыта не противорѣчили этому допущенію. Произведя соотвѣтствующія астрономическія наблюденія, Лобачевскій пришелъ къ выводу, что для того, чтобы въ предѣлахъ видимаго міра мы не замѣчали уклоненія отъ Эвклидовой геометріи,— постоянная l должна въ нѣсколько сотъ тысячъ разъ перевосходить поперечникъ земной орбиты. Въ этомъ нѣтъ, конечно, ничего невозможнаго.

Мы уже имѣли случай упоминать, какъ встрѣтили современники первые шаги Лобачевскаго. Къ сожалѣнію, это отношеніе оставалось по существу неизмѣннымъ на протяженіи 30-лѣтней научной дѣятельности великаго геометра. Вотъ что писалъ о Лобачевскомъ въ популярномъ журналѣ «Сынъ отечества» анонимный авторъ, въ которомъ есть основаніе подозрѣвать маститаго академика:

«... Многіе изъ первоклассныхъ нашихъ математиковъ читали ее (т.е. статью «О началахъ геометріи»), думали и ничего не поняли. Послѣ чего уже не считаю нужнымъ упоминать, что и я, продумавъ надъ сей книгой нѣсколько времени, ничего не придумалъ, т.-е. не понялъ почти ни одной мысли. Даже трудно было бы понять и то, какимъ образомъ г. Лобачевскій изъ самой легкой и самой ясной въ математикѣ науки, какова геометрія, могъ сдѣлать такое тяжелое, такое темное и непроницаемое ученіе, если бы самъ онъ не надоумилъ насъ, сказавъ, что его геометрія отлична отъ *употребительной*, которой всѣ мы учились, и которой, вѣроятно, уже разучиться не можемъ, и есть только *воображаемая* *).

«Да, теперь все очень понятно. Чего не можетъ представить воображеніе, особенно живое и вмѣстѣ уродливое? Почему не вообразить, напр., черное бѣлымъ, круглое четыреугольнымъ, сумму всѣхъ угловъ въ прямолинейномъ треугольникѣ меньше двухъ прямыхъ?...» «... Какъ можно подумать, чтобы г. Лобачевскій, ординарный профессоръ математики, написалъ съ какою-нибудь серьезною цѣлью книгу, которая немного бы при-

---

*) Этимъ словомъ, которое дало поводъ для глумленія рьяному критику, Лобачевскій хотѣлъ, конечно, сказать только то, что, *какъ логическая система*, его геометрія во всякомъ случаѣ законна. Вспомнимъ, что и комплексныя числа и даже отрицательныя при возникновеніи своемъ назывались «воображаемыми», «мнимыми» и т. п.

несла чести и послѣднему приходскому учителю. Если не ученость, то, по крайней мѣрѣ, здравый смыслъ долженъ имѣть каждый учитель, а въ новой геометріи нерѣдко недостаетъ и сего послѣдняго.... Почему бы вмѣсто заглавія: «О началахъ геометріи» не написать, напримѣръ, «Сатира на геометрію» «Каррикатура на геометрію» или что нибудь подобное?»

Итакъ, предсказаніе Гаусса сбылось: «осы» дѣйствительно «поднялись надъ головой» Лобачевскаго. Была такая возможность, которая если бы сбылась, могла бы оказать Лобачевскому большую нравственную поддержку: въ 1846 г. Гауссъ писалъ Шумахеру объ одной изъ статей Лобачевскаго, появившейся на нѣмецкомъ языкѣ: «...Авторъ трактуетъ о предметѣ, какъ знатокъ, въ истинно-геометрическомъ духѣ. Я считалъ себя обязаннымъ обратить ваше вниманіе на эту книгу, чтеніе которой не преминетъ доставить вамъ живѣйшее удовольствіе». Но вѣрный себѣ, Гауссъ не высказалъ этихъ мыслей вслухъ, и до Лобачевскаго онѣ, повидимому, не дошли. Лобачевскій умеръ въ 1856 г., такъ и не встрѣтивъ сочувствія своимъ идеямъ; однако, еще за годъ до смерти, ослѣпшій геометръ диктовалъ свою «Пангеометрію», продолжая вѣрить, что торжество его идей рано или поздно обезпечено.



Памятникъ Н. И. Лобачевскому въ Казани.

Мы не придаемъ значенія вопросу о такъ-называемомъ научномъ «пріоритетѣ», о томъ, кто раньше и насколько независимо сдѣлалъ то или иное открытіе. Истина несомнѣнно лежитъ въ словахъ, обращенныхъ В. Боліаи къ своему сыну: «...для нѣкоторыхъ вещей (идей) существуютъ эпохи, когда онѣ появляются одновременно во многихъ мѣстахъ, подобно тому, какъ фіалки ранней весной выходятъ на свѣтъ отовсюду»...

Мы не будемъ поэтому останавливаться на вопросѣ о томъ, кому—Лобачевскому ли, Боліаи, Гауссу или кому другому—принадлежитъ честь открытія не-Эвклидовой геометріи. И, однако, если имя Лобачевскаго звучитъ громче другихъ, когда говорятъ о совершившемся недавно переворотѣ въ геометріи, если именно онъ получилъ,—правда, черезъ полвѣка послѣ смерти—отъ извѣстнаго англійскаго математика Клиффорда почетный титулъ «Коперника геометріи»,—то это должно быть приписано не только научнымъ заслугамъ, но и *научному мужеству* русскаго геометра, его непоколебимой вѣрѣ въ истинность новыхъ идей.

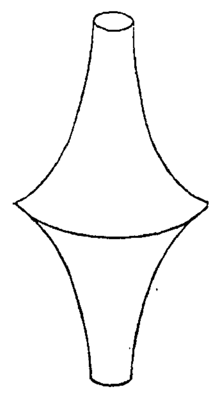
Дальнѣйшее развитіе не-Эвклидовой геометріи.

Всего нѣсколько лѣтъ не дожилъ Лобачевскій до первыхъ успѣховъ своихъ идей. Сначала появились отдѣльные послѣдователи; во Франціи *Гюэлъ*, въ Германіи *Бальтцеръ*, въ Италіи *Батальини* ревностно переводили и популяризовали сочиненія Лобачевскаго и Боліаи. Однако, большинство математиковъ все еще продолжало смотрѣть на новую геометрическую систему, какъ на болѣе или менѣе любопытный курьезъ. Но въ этомъ положеніи дѣлъ вдругъ наступилъ переломъ и пришелъ онъ съ той стороны, откуда его совсѣмъ не ждали.

Итальянскій геометръ *Бельтрами* занимался вопросомъ, казалось бы далеко стоявшимъ отъ теоретическихъ тонкостей,—вопросомъ о такъ-называемыхъ картографическихъ проекціяхъ. Задача здѣсь состояла въ томъ, чтобы отобразить одну поверхность на другой, при чемъ геодезическимъ*) линіямъ одной поверхности должны соотвѣтствовать геодезическія же линіи на другой. Съ частнымъ случаемъ этой задачи мы встрѣчаемся при черченіи географическихъ картъ, гдѣ требуется изобразить часть поверхности земного шара на плоскости такъ, чтобы меридіаны изобразились прямыми. Давно уже было извѣстно, что сфера

*) Напомнимъ, что геодезическими линіями на данной поверхности наз. линіи кратчайшихъ разстояній между точками этой поверхности. Такъ на плоскости геодезическими линіями являются прямыя, на сферѣ—большіе круги (меридіаны), на орисферѣ—орициклы и т. п.

и вообще поверхности постоянной положительной кривизны *) допускаютъ картографическое отображенiе на плоскости. Бельтрами заинтересовался вопросомъ о картографическомъ отображенiи поверхностей постоянной *отрицательной* кривизны—и это привело его къ открытiю обширнаго класса такихъ поверхностей, которыя онъ назвалъ «псевдосферами» («ложными сферами»). Простѣйшая изъ псевдосферъ получается отъ вращенiя кривой, носящей названiе «трактриссы» **); часть этой поверхности изображена на черт. 21. Дальнѣйшее изслѣдованiе обнаружило, что на псевдосферахъ существуютъ линiи (геодезическiя), играющiя роль прямыхъ на плоскости. Именно, каждая изъ этихъ линiй опредѣляется двумя точками на псевдосферѣ, простирается безконечно въ обѣ стороны и т. д., но... вмѣсто постулата Эвклида на псевдосферѣ имѣетъ мѣсто постулатъ Лобачевскаго: черезъ каждую точку псевдосферы можно провести цѣлый пучокъ геодезическихъ линiй, не пересѣкающихъ данной геодезической линiи. Итакъ, «воображаемая» геометрiя—по крайней мѣрѣ, планиметрiя—Лобачевскаго нашла свое реальное воплощенiе. Тригонометрическiя формулы Лобачевскаго перестали быть мертвымъ капиталомъ—отнынѣ ихъ можно было примѣнять къ вполнѣ конкретнымъ вопросамъ, напр., къ рѣшенiю псевдосферическихъ треугольниковъ. Оказалось, что не только Эвклидова планиметрiя является одной изъ главъ въ геометрiи Лобачевскаго (мы говоримъ, конечно, объ орисферѣ), но и обратно—старая геометрiя столь же терпима къ своей новоявленной соперницѣ. Вмѣстѣ съ тѣмъ выяснилось, что геометрическая система Лобачевскаго не можетъ рухнуть, не увлекая въ своемъ паденiи и систему Эвклида.



Черт. 21.

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что развитiе планиметрiи Лобачевскаго привело бы насъ когда-нибудь къ противорѣчiю. Но тогда это противорѣчiе обнаружилось бы и на псевдосферѣ; а такъ какъ ученiе о псевдосферѣ представляетъ собою главу

*) См. статью «Диф. геометрiя».
**) См. статью «Замѣчательныя кривыя».

обыкновенной (Эвклидовой) геометріи, то, значитъ, противорѣчіе содержится и въ этой послѣдней.

Другой выводъ, который былъ сдѣланъ изъ открытія Бельтрами, это—*недоказуемость* Эвклидова постулата, по крайней мѣрѣ, невозможность вывести его изъ соображеній планиметрическихъ. Дѣйствительно, если бы постулатъ Эвклида могъ быть доказанъ, т.-е. выведенъ изъ предшествующихъ аксіомъ—на плоскости, то онъ могъ бы быть доказанъ и на псевдосферѣ, такъ какъ послѣдняя подчиняется всѣмъ этимъ аксіомамъ; между тѣмъ на псевдосферѣ постулатъ Эвклида не имѣетъ мѣста, слѣдовательно наше предположеніе (о возможности доказать постулатъ) невѣрно.

Однако, дальнѣйшія изслѣдованія показали, что выводы Бельтрами и его современниковъ не безупречны. Дефектъ кроется въ самомъ исходномъ пунктѣ: оказывается, что ни одинъ изъ типовъ псевдосферъ не воспроизводитъ *вполнѣ* геометріи Лобачевскаго. Это объясняется тѣмъ, что на псевдосферахъ всегда существуютъ такъ-называемыя «особенныя точки»; напр., у псевдосферы, изображенной на черт. 158, имѣется острое ребро, которое, такъ сказать, нарушаетъ однородность этой поверхности. На участкахъ псевдосферы, не содержащихъ особенныхъ точекъ, дѣйствительно примѣнимы формулы Лобачевскаго, но о всей поверхности этого сказать нельзя.

Изложенныя соображенія заставили позднѣйшихъ геометровъ обратиться къ инымъ истолкованіямъ не-Эвклидовой геометріи, о чемъ будетъ сказано далѣе.

Какъ бы то ни было, историческое значеніе открытія Бельтрами огромно. Начиная съ 1868 г. (годъ опубликованія перваго мемуара Бельтрами) интересъ къ геометріи Лобачевскаго непрерывно возрасталъ. Первымъ, естественно, былъ поставленъ на очередь вопросъ: нельзя ли найти такое же реальное истолкованіе и для *стереометріи* Лобачевскаго? Бельтрами, послѣ нѣсколькихъ неудачныхъ попытокъ, думалъ, что такое истолкованіе невозможно. Однако оно не замедлило появиться: основная идея принадлежала англичанину *Кели*, (который, впрочемъ, не имѣлъ въ виду непосредственно не-Эвклидовой геометріи), а осуществленіе — современному германскому математику

Ф. Клейну. Прежде чѣмъ приступить къ выясненію основныхъ принциповъ системы Кели-Клейна, мы должны предупредить читателя, что чтеніе нижеслѣдующихъ строкъ потребуетъ усиленнаго вниманія и—въ силу характера нашего изложенія—оставитъ многое неразъясненнымъ; того, кто заинтересуется этимъ вопросомъ, отсылаемъ къ систематическому его изложенію, которое — замѣтимъ кстати — не требуетъ спеціальныхъ познаній *).



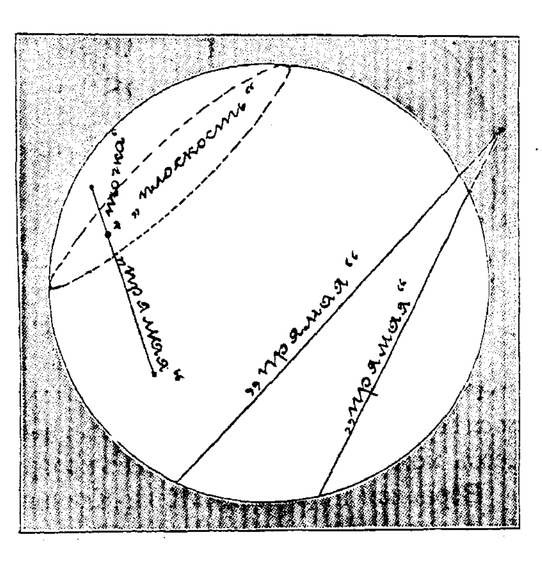
Феликсъ Клейнъ.
(Род. въ 1849 г.).

Мы будемъ исходить изъ обычныхъ Эвклидовыхъ понятій—о пространствѣ, точкахъ, прямыхъ, плоскостяхъ, сферахъ и т. д. Наряду съ этими понятіями, будутъ введены нѣкоторыя новыя для которыхъ, однако, цѣлесообразно воспользоваться старыми терминами (можно было бы, конечно, придумать и новые термины, но это затемнило бы главную цѣль нашего разсужденія), однако имѣющими уже не то, что прежде, содержаніе; для того, чтобы избѣжать смѣшенія понятій, всякій терминъ, употребленный въ новомъ смыслѣ, будетъ заключенъ въ кавычки (такъ что, напр., «точка» это не то же самое, что точка).

Пусть мы имѣемъ нѣкоторый шаръ. Будемъ называть «точкой» всякую обыкновенную точку, но только лежащую *внутри* этого шара (точки, лежащія на поверхности шара исключаются); «прямою»—всякую хорду, соединяющую двѣ точки шаровой поверхности (концы хорды исключаются); «плоскостью»—всякое круговое сѣченіе шара, т.-е. совокупность тѣхъ точекъ этого сѣченія, которыя лежатъ внутри шара (пограничная окруж-

*) См. напр. книгу *Кагана* «Очеркъ геометрической системы Лобачевскаго» стр. 200—210.

ность исключается). Однимъ словомъ, новыя «точки», «прямыя» и «плоскости» получаются изъ старыхъ одноименныхъ образовъ, если отбросить всѣ точки нашего обыкновеннаго пространства, лежащія за предѣлами нѣкоторой сферы и на этой сферѣ (см. черт. 22). Двѣ прямыя (или прямая и плоскость) наз. «пересѣкающимися», если онѣ имѣютъ общую «точку», т.-е. встрѣчаются *внутри* шара. На черт. изображены: 1) «пересѣкающіяся», «плоскость» и «прямая»; 2) двѣ «прямыя», которыя, хотя и пересѣкаются (внѣ шара), но не «пересѣкаются», такъ какъ не имѣютъ общей «точки». Оказывается, что несмотря на такое искусственное искаженіе основныхъ геометрическихъ понятій, къ «точкамъ», «прямымъ» и «плоскостямъ» примѣняются всѣ аксіомы обыкновенной геометріи, *кромѣ постулата о параллельности*. Такъ, напримѣръ, двѣ «точки» вполнѣ опредѣляютъ проходящую черезъ нихъ «прямую» (т.-е. двѣ точки внутри шара опредѣляютъ проходящую черезъ нихъ хорду); три «точки» опредѣляютъ «плоскость» и т. д.

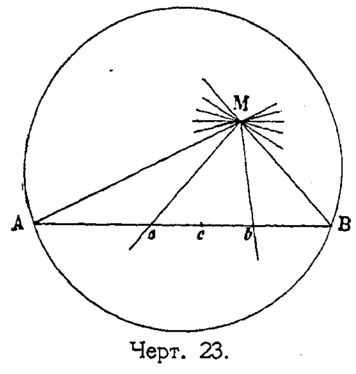


Черт. 22.

Посмотримъ теперь, какъ обстоитъ дѣло съ постулатомъ Эвклида. Для этого возьмемъ «плоскость», т.-е. круговое сѣченіе, изображенное отдѣльно на черт. 23. Пусть AB—«прямая» (A и B не «точки», такъ какъ лежатъ на периферіи), M—«точка» внѣ ея. «Прямыя», проходящія черезъ точку M внутри угла AMB, «пересѣкаютъ» «прямую» AB, но зато при точкѣ M имѣется цѣлый пучекъ «прямыхъ», не «пересѣкающихъ» «прямой» AB (такъ какъ пересѣченіе происходитъ за предѣлами сферы). Другими словами, въ нашемъ новомъ геометрическомъ мірѣ имѣетъ мѣсто постулатъ Лобачевскаго; «прямыя» MA и MB отдѣляютъ «пе-

ресѣкающія» «прямыя» отъ «непересѣкающихъ» и въ этомъ смыслѣ являются *параллелями Лобачевскаго.*

Теперь мы остановимся на нѣкоторыхъ недоумѣніяхъ, которыя, вѣроятно, уже возникли у читателя. Прежде всего, бросается въ глаза, что наши «прямыя» и «плоскости» какъ будто ограничены; между тѣмъ въ геометріи Лобачевскаго, какъ и въ геометріи Эвклида, безконечность этихъ образовъ играетъ существенную роль. Но въ чемъ же состоитъ геометрическая сущность понятія, напр., о безконечной прямой, та именно сущность, къ которой мы апеллируемъ при доказательствахъ? Безконечность прямой можно ввести такимъ постулатомъ: если отъ данной точки на прямой въ одномъ и томъ же направленіи будемъ послѣдовательно откладывать «равные отрѣзки», то такой процессъ можетъ быть продолжаемъ неограниченно.



Черт. 23.

Вернемся къ системѣ Кели-Клейна. Вѣдь мы еще не опредѣлили, что тамъ означаетъ терминъ «равные отрѣзки». Право этого опредѣленія остается пока за нами, и при выборѣ его надлежитъ руководствоваться только обычными требованіями, налагаемыми на равенство (если $x=y$, то $y=x$; если $x=y$ и $y=z$, то $x=z$) и соображеніями цѣлесообразности. Въ обыкновенной геометріи для сравненія отрѣзковъ пользуются способомъ наложенія; въ геометріи Кели-Клейна для той же цѣли служитъ другой, болѣе сложный процессъ, описаніе котораго завело бы насъ въ глубь проективной геометріи. Поэтому мы пойдемъ другимъ путемъ; опредѣлимъ сначала, что мы будемъ разумѣть подъ «длиной» «отрѣзка ab» (a и b крайнія «точки» «отрѣзка»), каковую будемъ сокращенно обозначать символомъ «ab»*).

Итакъ, если прямая ab встрѣчаетъ сферу въ точкахъ A и B, расположенныхъ, какъ показано на черт. 160, то условимся, что

$$«ab» = \frac{k}{2}\log\left(\frac{aB}{bB}:\frac{aA}{bA}\right), \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3),$$

*) Предлагаемъ читателю внимательнѣе вдуматься въ приводимые ниже соображенія, иначе сущность излагаемаго не будетъ ему понятна.

гдѣ k постоянный множитель, а *log*—натуральный логариѳмъ; выраженіе, стоящее въ скобкахъ, есть не что иное, какъ ангармоническое отношеніе*) четырехъ точекъ A, a, b, B. Можно убѣдиться, что опредѣленная такимъ образомъ «длина» обладаетъ основными свойствами обыкновенной длины. Напр., если «точки» a и b сливаются въ одну c, то

$$«ab» = \frac{k}{2} \log\left(\frac{cB}{cB} : \frac{cA}{cA}\right) = \frac{k}{2} \log 1 = 0;$$

если «точка» C лежитъ на прямой между «точками» a и b, то

$$«ac» + «cb» = \frac{k}{2} \log\left(\frac{aB}{cB} : \frac{aA}{cA}\right) + \frac{k}{2} \log\left(\frac{cB}{bB} : \frac{cA}{bA}\right) =$$

$$= \frac{k}{2} \log\left[\left(\frac{aB}{cB} : \frac{aA}{cA}\right) \times \left(\frac{cB}{bB} : \frac{cA}{bA}\right)\right] = \frac{k}{2} \log\left(\frac{aB}{bB} : \frac{aA}{bA}\right) = «ab».$$

Назовемъ теперь «отрѣзки» «равными», если равны ихъ «длины»; такіе отрѣзки вовсе не будутъ равны въ обычномъ смыслѣ слова, т.-е. при наложеніи не будутъ совмѣщаться. Напротивъ, можно показать, что изъ двухъ «равныхъ» отрѣзковъ тотъ будетъ меньше, который ближе къ поверхности сферы. Поэтому, если, напр., отъ «точки» a по «прямой» AB будемъ откладывать—напр., вправо—одинъ за другимъ «равные» отрѣзки, то послѣдніе на самомъ дѣлѣ будутъ уменьшаться по такому закону, то точка B никогда достигнута не будетъ; точка B (такъ же, какъ и A) является такимъ образомъ «безконечно-удаленной» и выраженіе «параллельныя прямыя встрѣчаются въ безконечно-удаленной точкѣ» пріобрѣтаетъ въ геометріи Кели-Клейна вполнѣ наглядный смыслъ (замѣтимъ, что MA и MB суть правая и лѣвая параллели къ «прямой» AB).

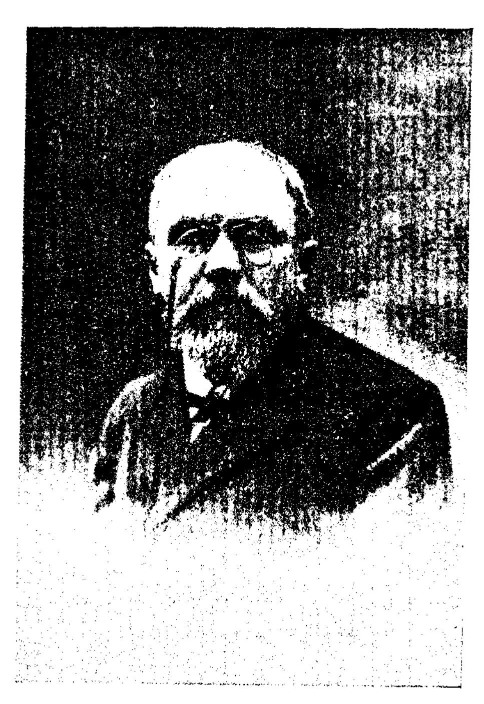
Тому изъ читателей, кому эти разсужденія покажутся слишкомъ абстрактными, быть можетъ кое-что уяснится изъ слѣдующаго образнаго сравненія, принадлежащаго французскому математику *Пуанкаре*: **)

«Предположимъ, что нѣкоторый міръ заключенъ въ громадной сферѣ и подчиняется слѣдующимъ законамъ: температура

*) См. статью «Проективная геометрія».

**) «Наука и гипотеза», Москва 1903, стр. 47—49.

его неодинакова во всѣхъ точкахъ шара; она достигаетъ максимума въ центрѣ, уменьшаясь до абсолютнаго нуля въ точкахъ поверхности шара, въ которомъ нашъ міръ заключенъ. Этотъ законъ измѣненія температуры можетъ быть, напримѣръ, слѣдующимъ: пусть R—радіусъ нашего шара и r—разстояніе разсматриваемой точки до центра; тогда температура можетъ быть, напримѣръ, пропорціональна R^2-r^2; затѣмъ положимъ, что коэффиціенты расширенія всѣхъ тѣлъ одинаковы и таковы, что длина расширяющагося тѣла (напр., прута) пропорціональна абсолютной температурѣ; наконецъ, что предметъ, перенесенный изъ одной точки сферы въ другую, моментально принимаетъ температуру окружающей среды.—Въ этихъ предположеніяхъ нѣтъ ничего противорѣчащаго или неосуществимаго; изъ нихъ вытекаетъ еще одно условіе, что нашъ воображаемый міръ, конечный съ точки зрѣнія обыкновенной геометріи, покажется безконечнымъ его обитателямъ; въ самомъ дѣлѣ, въ такомъ мірѣ двигающійся предметъ уменьшается по мѣрѣ удаленія отъ центра; слѣдовательно, обитатели его, удаляясь отъ центра, уменьшаются; уменьшаются и ихъ шаги, такъ что они никогда не могутъ дойти до границы своего міра... Если наши существа создадутъ себѣ геометрію, то она будетъ отличаться отъ нашей; она не будетъ представлять изученія перемѣщеній неизмѣняемыхъ твердыхъ тѣлъ, но изученіе измѣ-



Анри Пуанкаре.
(1854—1912).

ненiй, познаваемыхъ нашими существами, какъ измѣненiя положенiя; это будутъ *не-Эвклидовы перемѣщенiя* и *не-Эвклидова геометрiя*.

Итакъ, существа, хотя и подобныя намъ, но воспитывающiяся впечатлѣнiями другого мiра, будутъ имѣть и другую геометрiю».

Возвращаясь къ геометрiи Кели-Клейна, замѣтимъ, что опредѣленiе «равенства угловъ» тамъ также не соотвѣтствуетъ Эвклидову опредѣленiю; напр., прямыя MA и MB образуютъ «равные углы» съ «перпендикуляромъ», опущеннымъ изъ M на AB.

Послѣ того, какъ установлено измѣренiе угловъ и отрѣзковъ, Клейнъ устанавливаетъ ту функцiональную зависимость, которая существуетъ въ его геометрiи между этими величинами, т.-е. изучаетъ функцiю $\Pi(x)$ Лобачевскаго; оказывается, что имѣетъ мѣсто слѣдующая формула:

$$tg\, \tfrac{1}{2}\, \Pi(x) = e^{-\frac{x}{\varkappa}};$$

сопоставляя этотъ результатъ съ формулой (2) на стр. 38, видимъ, что $k=l$. Итакъ, «постоянная» Лобачевскаго есть не что иное, какъ постоянный множитель въ Кели-Клейновой формулѣ разстоянiя (3). Такимъ образомъ методъ Кели-Клейна даетъ возможность *строить въ рамкахъ Эвклидовой геометрiи трехмѣрные пространственные образы, для которыхъ имѣетъ мѣсто геометрiя Лобачевскаго*.

Мы не будемъ здѣсь повторять тѣхъ выводовъ, которые сдѣлали въ свое время по поводу открытiя Бельтрами. Скажемъ только, что недоказуемость Эвклидова постулата и отсутствiе противорѣчiй въ системѣ Лобачевскаго (поскольку мы допускаемъ, что нѣтъ противорѣчiй въ геометрiи Эвклида) вытекаютъ изъ теорiи Кели-Клейна безъ тѣхъ изъяновъ, которые были допущены Бельтрами, и притомъ сразу для трехмѣрнаго пространства.

Открытiемъ Кели и Клейна было сдѣлано то, что отнынѣ судьбы геометрiй Эвклида и Лобачевскаго оказались навѣки связанными. Нельзя уже было болѣе утверждать, что одна изъ нихъ имѣетъ *логическое* преимущество передъ другой: либо обѣ законны, либо обѣ незаконны. Теперь естественно возникъ вопросъ: на чемъ покоится наша увѣренность въ отсутствiи противо-

рѣчій въ системѣ Эвклида? Разъ наше пространственное воззрѣніе (интуиція) оказалось настолько ненадежнымъ орудіемъ, что въ теченіе тысячелѣтій развивало въ насъ односторонній взглядъ на природу пространства, то не обманываетъ ли оно насъ вообще? Безупречна ли геометрія Эвклида, какъ логическая система? Мало поставить такой вопросъ—надо еще указать, при какихъ условіяхъ мы будемъ считать его рѣшеннымъ; надо найти ту почву, на которую можно съ полной увѣренностью опереться. Для математика въ этомъ вопросѣ не можетъ быть колебаній: *міръ чиселъ*, ариѳметика въ широкомъ смыслѣ слова—особенно теперь, послѣ критическихъ работъ Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора,—представляется нашему уму той именно логически-безупречной, наиболѣе абстрактной областью мышленія, въ которой можно искать оправданія для различныхъ геометрическихъ системъ. Такъ возникла мысль о созданіи «аналитическихъ пространствъ», т.-е. такихъ ариѳметическихъ системъ, въ которыхъ только и есть геометрическаго, что терминологія, но которыя по существу своему представляютъ собой главы чистаго анализа.

Попытаемся дать представленіе о теоріи одного изъ такихъ «аналитическихъ пространствъ», соотвѣтствующаго системѣ Эвклида. Происхожденіе опредѣленій, которыя мы сейчасъ формулируемъ, будетъ понятно только лицу, знакомому съ аналитической геометріей въ пространствѣ, но, по справедливому замѣчанію Велльштейна*), «читатель, незнакомый еще съ этой областью математики, представляетъ для насъ даже нѣкоторое преимущество, такъ какъ вынужденъ будетъ строго придерживаться опредѣленій, между тѣмъ, какъ лицо, освѣдомленное въ аналитической геометріи, можетъ безсознательно воспользоваться своими познаніями и сдѣлать выводы, которые изъ нашихъ опредѣленій вовсе не вытекаютъ».

Итакъ, будемъ называть *ан.* **) *точкой* любую тройку вещественныхъ чиселъ, данныхъ въ извѣстной послѣдовательности: (a, b, c). Совокупность всѣхъ ан. точекъ, т.-е. всѣхъ возможныхъ

---

*) *Weber* и *Wellstein*. Энциклопедія элем. математики. Одесса 1913, т. II, стр. 101.

**) Сокращеніе слова «аналитическій».

числовыхъ троекъ, различающихся либо составомъ, либо порядкомъ чиселъ, образуетъ *ан. пространство* (трехмѣрное).

Ан. плоскостью наз. совокупность всѣхъ ан. точекъ (x, y, z), у которыхъ числа x, y, z удовлетворяютъ уравненію первой степени

$$Ax+By+Cz+D=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

гдѣ A, B, C и D—постоянные коэффиціенты; при этомъ говорятъ, что каждая такая ан. точка (x, y, z) «лежитъ въ ан. плоскости (4)». *Ан. прямой* называется совокупность точекъ (x, y, z), у которыхъ числа x, y, z удовлетворяютъ одновременно двумъ уравненіямъ первой степени

$$Ax+By+Cz+D=0 \text{ и } A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \ldots (5);$$

относительно этой ан. прямой говорятъ, что она «лежитъ въ каждой изъ ан. плоскостей (5)». Подъ *ан. разстояніемъ* двухъ ан. точекъ (a, b, c) и (a_1, b_1, c_1) разумѣютъ число, равное

$$+\sqrt{(a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(c-c_1)^2}.$$

Далѣе устанавливается понятіе объ *ан. углѣ* между двумя ан. прямыми; это дѣлается чисто аналитически, на основаніи формулъ Эйлера, связывающихъ тригонометрическія функціи съ показательными и т. д.

Мы не будемъ утруждать читателя дальнѣйшимъ перечисленіемъ терминовъ «ан. пространства». Скажемъ только, что указаннымъ путемъ мы могли бы развить всю Эвклидову геометрію *безъ чертежа*; при этомъ, вмѣсто плоскостей, мы имѣли бы дѣло съ уравненіями первой степени о трехъ неизвѣстныхъ; вмѣсто прямыхъ—съ пàрами такихъ уравненій; каждое геометрическое предложеніе выражалось бы здѣсь въ алгебрической формѣ. Напримѣръ, то обстоятельство, что черезъ три точки пространства проходитъ (вообще говоря) единственная плоскость, соотвѣтствуетъ слѣдующему алгебраическому факту: если даны три тройки чиселъ (a, b, c), (a_1, b_1, c_1), и (a_2, b_2, c_2), то этимъ самымъ (вообще говоря) вполнѣ опредѣляется то уравненіе первой степени типа (4), которому удовлетворяютъ числа, составляющія эти тройки. Въ самомъ дѣлѣ, если вспомнимъ, что для того, чтобы опредѣлить уравненіе, намъ достаточно знать величины

отношеній трехъ его коэффиціентовъ къ четвертому, напр., отношенія $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$ и $\frac{C}{D}$ (такъ какъ отъ дѣленія всѣхъ членовъ уравненія на одно и то же число получается эквивалентное уравненіе)—то мы легко усмотримъ въ приведенномъ выше утвержденіи общеизвѣстную алгебраическую истину, состоящую въ томъ, что изъ трехъ уравненій

$$\frac{A}{D}a + \frac{B}{D}b + \frac{C}{D}c + 1 = 0$$

$$\frac{A}{D}a_1 + \frac{B}{D}b_1 + \frac{C}{D}c_1 + 1 = 0$$

$$\frac{A}{D}a_2 + \frac{B}{D}b_2 + \frac{C}{D}c_2 + 1 = 0$$

съ тремя неизвѣстными $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$ и $\frac{C}{D}$ можно (вообще говоря) опредѣлить эти неизвѣстныя.

Идя этимъ путемъ, обнаружили, что для аналитическаго пространства, опредѣляемаго такъ, какъ это было намѣчено выше, справедливы всѣ Эвклидовы предпосылки, а, слѣдовательно, и всѣ выводы изъ этихъ предпосылокъ. Но такъ какъ при этомъ оперируютъ исключительно съ числами и ариѳметическими понятіями, то *въ геометріи Эвклида не можетъ быть внутренняго противорѣчія безъ того, чтобы такое же противорѣчіе не заключалось и въ ученіи о числѣ*. Для того, чтобы строго обосновать послѣднее предложеніе, было необходимо, конечно, разъ навсегда систематизировать тѣ предпосылки, которыя лежатъ въ основѣ Эвклидовой геометріи. Эта задача была выполнена недавно германскимъ математикомъ *Гильбертомъ* въ сочиненіи его «Grundlagen der Geometrie» (Основанія геометріи), ставшемъ въ послѣднее время подлиннымъ катехизисомъ геометріи.

Геометрія Лобачевскаго явилась, какъ результатъ отказа отъ одной изъ Эвклидовыхъ предпосылокъ—постулата о параллельности. Самъ собою напрашивается вопросъ: какія геометріи

будемъ мы получать, отказываясь отъ другихъ предпосылокъ? Въ этомъ направленіи много было сдѣлано за послѣднія десятилѣтія. Такъ, знаменитый геометръ *Риманъ* построилъ свою геометрію на отказѣ отъ положенія: «двѣ точки вполнѣ опредѣляютъ прямую», что равносильно допущенію существованія прямыхъ, которыя пересѣкаются въ двухъ точкахъ. Получилась своеобразная *Риманова геометрія*, которая оказалась вполнѣ соотвѣтствующей «гипотезѣ тупого угла». Послѣ этого стало ясно, почему Саккери, Ламбертъ и Лежандръ отвергали раньше эту гипотезу: они не отказывались отъ постулата, опущеннаго Риманомъ.



Германскій математикъ **Гильбертъ.**

Плоская геометрія Римана имѣетъ мѣсто на поверхностяхъ постоянной положительной кривизны; поэтому частнымъ случаемъ ея является сферическая геометрія, гдѣ дѣйствительно двѣ геодезическія линіи (меридіаны) пересѣкаются въ двухъ точкахъ (полюсахъ), гдѣ не существуетъ параллельныхъ геодезическихъ линій и гдѣ сумма угловъ треугольника больше $2d$.

Для геометріи Римана, какъ и для геометрій Эвклида и Лобачевскаго, можно построить соотвѣтствующее «аналитическое пространство».

Отказываясь отъ другихъ предпосылокъ обыкновенной геометріи, будемъ получать другія геометрическія системы. Этому потоку «не-Эвклидовыхъ геометрій» указалъ русло норвежскій математикъ *Софусъ Ли* *), который, пользуясь своей «теоріей непрерывныхъ группъ преобразованій», обнаружилъ, что при

*) См. хрест,. т. II, стр. 230—231.

нѣкоторыхъ, достаточно общихъ условіяхъ, относящихся къ движенію твердыхъ тѣлъ, мы никогда не выйдемъ за предѣлы трехъ основныхъ типовъ геометріи: Эвклида, Лобачевскаго и Римана.

Настоящій краткій очеркъ закончимъ глубокими замѣчаніями уже однажды цитированнаго геометра Пуанкаре **).

«Теперь попробуемъ спросить себя: истинна ли Эвклидова геометрія? Вопросъ не имѣетъ смысла. Это все равно, что спрашивать, вѣрна ли метрическая система мѣръ, а прежнія невѣрны, или вѣрны ли Декартовы координаты, а другія ложны. Одна геометрія не вѣрнѣе другой, а только болѣе или менѣе *удобна*. А Эвклидова геометрія была и останется самой удобной: во-первыхъ, потому, что она самая простая, и не только тѣмъ, что нашъ разумъ привыкъ къ ней; она проще другихъ геометрій, какъ многочленъ первой степени проще многочлена второй степени, и, во-вторыхъ, потому, что она согласна со свойствами твердыхъ тѣлъ природы».

Прибавимъ къ этому, что въ не-Эвклидовыхъ геометріяхъ *пока* не встрѣчается *практической* надобности, но возможность таковой, какъ уже указывалось, не исключается при дальнѣйшемъ расширеніи предѣловъ нашего опыта.

Теоретическое же значеніе совершившагося въ области основаній геометріи переворота настолько огромно, что упоминавшееся выше сопоставленіе между Лобачевскимъ и Коперникомъ не кажется намъ преувеличеніемъ.

---

*) Гипотеза и наука, стр. 38.

Четвертое измѣреніе.

Ни съ однимъ изъ вопросовъ высшей математики не связано столько смутныхъ и противорѣчивыхъ понятій, сколько создалось ихъ около такъ-называемой «геометріи многихъ (въ частности четырехъ) измѣреній». Мы говоримъ, конечно, о широкихъ кругахъ не спеціалистовъ, потому что для современныхъ научно-образованныхъ математиковъ вопросъ о многомѣрныхъ геометріяхъ не представляетъ ничего таинственнаго и занимаетъ довольно второстепенное мѣсто въ наукѣ *).

Мы часто говоримъ, что живемъ въ пространствѣ трехъ измѣреній, что плоскость (и, вообще, поверхность) есть протяженіе двумѣрное, а прямая (и вообще линія)—одномѣрное. Къ этимъ выраженіямъ такъ привыкли, что рѣдко задумываются надъ ихъ подлиннымъ содержаніемъ. Между тѣмъ мы увидимъ сейчасъ, что содержаніе это далеко не просто и пережило коренную эволюцію въ самое недавнее время.

Съ понятіемъ о различномъ числѣ измѣреній геометрическихъ объектовъ мы сталкиваемся уже на первыхъ ступеняхъ изученія математики — въ ариѳметикѣ. Послѣдняя пользуется для измѣренія длинъ—однимъ числомъ, для измѣренія площадей простѣйшихъ фигуръ (прямоугольниковъ)—двумя числами и, наконецъ, для измѣренія объемовъ простѣйшихъ тѣлъ (параллелепипедовъ)—тремя числами. Сообразно съ этимъ вводятся три качественно-различныя единицы измѣренія—линейныя, квад-

*) Этимъ объясняется тотъ фактъ, что, хотя вопросъ въ настоящее время не представляетъ принципіальныхъ затрудненій, но литература (систематическая) о немъ очень бѣдна и на добрую половину исчерпывается тѣми трудами, которые мы приводимъ въ библіографическомъ указателѣ.

ратныя и кубическія. Въ геометріи та же идея обобщается на болѣе сложные геометрическіе образы и приводитъ къ такъ называемому «принципу однородности геометрическихъ выраженій», столь полезному при повѣркѣ формулъ, выражающихъ длины, площади и объемы.

До сихъ поръ вопросъ о числѣ измѣреній остается въ области такъ-называемой «геометрической метрики», т.-е. ученія о количественной характеристикѣ пространственныхъ образовъ. Однако, пользуясь идеей о движеніи, можно подойти къ дѣлу и съ другой стороны. Примемъ за основной геометрическій элементъ—точку; тогда повторно примѣняемая операція движенія будетъ переводить насъ каждый разъ отъ образовъ съ низшимъ числомъ измѣреній къ образамъ съ высшимъ числомъ таковыхъ. Дѣйствительно, слѣдъ точки, движущейся въ пространствѣ, есть линія (одномѣрный образъ). Слѣдъ движущейся линіи есть (за исключеніемъ одного случая) нѣкоторая поверхность*) т-е. двумѣрный образъ. Наконецъ, движущаяся поверхность описываетъ — опять-таки за однимъ исключеніемъ — все пространство **) или часть его (напр. тѣла вращенія), т.-е., образы трехмѣрные. Здѣсь можетъ возникнуть кажущееся недоразумѣніе: разсуждая по аналогіи, можно было бы поспѣшно заключить, что движущееся тѣло (три измѣренія) воспроизведетъ намъ образъ высшаго—четвертаго измѣренія. Однако, это не такъ: то движеніе, которое мы въ данномъ случаѣ себѣ представляемъ, есть движеніе трехмѣрнаго тѣла по *трехмѣрному* же пространству, и новаго измѣренія здѣсь не возникаетъ по той же причинѣ, по какой его не получается, когда, напр., отрѣзокъ прямой скользитъ вдоль этой прямой или когда, напр., плоская фигура перемѣщается по своей плоскости (это и есть тотъ исключительный случай движенія, о которомъ было сказано выше).

Слѣдующій этапъ въ развитіи нашего вопроса связанъ съ основными идеями аналитической геометріи. Положеніе точки

*) напр., поверхность вращенія, образуемая движеніемъ неизмѣняемой линіи около оси; если же позволимъ линіи, при движеніи, деформироваться, то сможемъ получить какія угодно сложныя поверхности.

**) напр., въ случаѣ плоскости, вращающейся около одной изъ своихъ прямыхъ.

на прямой вполнѣ опредѣляется *однимъ* числомъ—положительнымъ или отрицательнымъ,—показывающимъ на какомъ разстояніи и по какую сторону эта точка лежитъ отъ другой точки, выбранной на данной прямой за начальную. Тѣмъ же принципомъ можно, конечно, пользоваться и для опредѣленія положенія точки на кривой линіи *). Для того, чтобы знать положеніе точки на плоскости—примемъ ли мы Декартову систему координатъ, полярную или какую иную—достаточно *двухъ* числовыхъ данныхъ; для точки на сферѣ (напр., на земной поверхности или на небесной сферѣ)—достаточно также двухъ числовыхъ данныхъ, напр., достаточно знать широту и долготу точки. Наконецъ, положеніе точки въ пространствѣ вполнѣ опредѣляется *тремя* координатами. Обратно, всякой тройкѣ вещественныхъ чиселъ, данной въ извѣстномъ порядкѣ, отвѣчаетъ опредѣленная точка пространства; всякой парѣ чиселъ — точка на плоскости и т. д. Поэтому на первый взглядъ можетъ показаться пріемлемымъ такое опредѣленіе: совокупность точекъ, составляющихъ данный геометрическій образъ, мы будемъ называть 1) одномѣрною, 2) двумѣрною, 3) трехмѣрною и т. д., смотря потому можетъ ли эта совокупность быть поставлена въ взаимно-однозначное соотвѣтствіе**) съ совокупностью 1) всѣхъ вещественныхъ чиселъ, 2) всѣхъ паръ вещественныхъ чиселъ, 3) всѣхъ троекъ вещественныхъ чиселъ и т. д.

Но здѣсь естественно возникаетъ такой вопросъ: не можетъ ли случиться, чтобы какая-нибудь совокупность точекъ оказалась, въ силу нашего опредѣленія, напр., одномѣрною и въ то же время двумѣрною? А этотъ вопросъ равносиленъ слѣдующему: могутъ ли быть поставлены въ взаимно-однозначное соотвѣтствіе или, какъ говорятъ, имѣютъ ли одинаковую «мощность» совокупность всѣхъ вещественныхъ чиселъ съ одной стороны и совокупность всѣхъ *паръ* вещественныхъ чиселъ—съ другой? Здѣсь мы подходимъ къ основному вопросу теоріи множествъ и должны быть готовы ко всѣмъ неожиданностямъ, которыми такъ богато это молодое ученіе.

---

*) Мы здѣсь не говоримъ, разумѣется, о такихъ кривыхъ, какъ построенныя Пеано и Гильбертомъ,—кривыхъ, которыя одинъ современный математикъ мѣтко назвалъ «патологическими».

**) См. Хрест. II, стр. 246.

Дѣйствительно, творецъ этой теоріи *Г. Канторъ* показалъ, что всѣ точки пространства могутъ быть поставлены въ взаимно-однозначное соотвѣтствіе со всѣми точками плоскости, а послѣднія—въ такое же соотвѣтствіе со всѣми точками прямой *). Отсюда, какъ непосредственное слѣдствіе, вытекаетъ, что положеніе точки на плоскости или въ пространствѣ можетъ быть вполнѣ опредѣлено *одной* координатой (какъ это имѣетъ мѣсто на прямой). Позднѣйшіе геометры *Пеано* и *Гильбертъ* пошли въ этомъ направленіи дальше и построили такъ-называемую «кривую, заполняющую квадратъ», т.-е. достигли того, что, при непрерывномъ измѣненіи независимаго перемѣннаго (параметра) въ нѣкоторомъ промежуткѣ, соотвѣтствующая точка**) описываетъ непрерывную кривую, не пропуская при этомъ ни одной изъ внутреннихъ точекъ квадрата.

Эти открытія, казалось бы, въ корнѣ разрушаютъ ученіе объ измѣреніяхъ пространствъ. Въ самомъ дѣлѣ, если положеніе точки въ пространствѣ можетъ быть опредѣлено одной координатой, то гдѣ грань, отдѣляющая пространство высшаго числа измѣреній отъ пространства съ низшимъ числомъ измѣреній? И какъ считать кривыя Пеано и Гильберта—одномѣрными или двумѣрными образами? Понадобились болѣе глубокія изслѣдованія для того, чтобы выяснить сущность этихъ вопросовъ; вотъ вкратцѣ результаты этихъ изслѣдованій.

Оказалось, что можно поставить въ взаимно-однозначное соотвѣтствіе точки отрѣзка съ точками квадрата (какъ это сдѣлано, напр., въ построеніи Кантора-Кёнига), но такое соотвѣтствіе, говоря словами *Ф. Клейна*, будетъ «... въ высшей степени разрывнымъ или, если угодно, неорганическимъ. Оно въ такой же мѣрѣ разрушаетъ—кромѣ «мощности»—все, что является характернымъ для плоскаго и для линейнаго образа, какъ таковыхъ, какъ если бы всѣ точки квадрата насыпали въ мѣшокъ и затѣмъ самымъ основательнымъ образомъ перемѣшали бы ихъ».

---

*) Объ этомъ, а также объ упоминаемой дальше кривой Гильберта см. статью «Геометрія и теорія множествъ».

**) Здѣсь имѣется въ виду такъ-наз. «параметрическое представленіе кривой», при которомъ координаты x и y точки на кривой даются въ функціи одного независимаго перемѣннаго (параметра) t, такъ что $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$. Если удается исключить t изъ этихъ уравненій, то получается непосредственная зависимость между x и y (уравненіе кривой въ Декартовыхъ координатахъ).

Съ другой стороны, можно, слѣдуя Пеано и Гильберту, достигнуть того, чтобы соотвѣтствіе наше было непрерывнымъ, но тогда придется пожертвовать требованіемъ взаимной однозначности. Сдѣлать же такъ, чтобы соотвѣтствіе было одновременно и *взаимно-однозначнымъ и непрерывнымъ* не удалось, и какъ было недавно доказано, *не можетъ удасться.* Вотъ гдѣ, слѣдовательно, корень различія между протяженіями различнаго числа измѣреній. Поэтому, *совокупность точекъ будемъ называть n-мѣрною* (n=1, 2, 3, ...) *только тогда, когда она можетъ быть поставлена въ непрерывное и однозначное соотвѣтствіе со всѣми возможными размѣщеніями вещественныхъ чиселъ по n.*

На этихъ нѣсколько отвлеченныхъ разсужденіяхъ мы считали необходимымъ остановиться потому, что нельзя говорить о пространствахъ различнаго числа измѣреній, не зная, что это такое. Теперь перейдемъ къ соображеніямъ болѣе элементарнаго и геометрическаго характера. Говоря о пространствахъ съ числомъ измѣреній, большимъ трехъ, мы будемъ преимущественно останавливаться на пространствѣ 4-хъ измѣреній, потому что дальнѣйшее обобщеніе построено на тѣхъ же принципахъ.

Ученіе о геометріи высшихъ пространствъ надо признать—по научному масштабу,—очень молодымъ. Появленіе его въ качествѣ научно-обоснованной дисциплины должно быть отнесено ко второй половинѣ прошлаго столѣтія и связано съ происходившимъ тогда кореннымъ переворотомъ въ области нашихъ воззрѣній на пространство. Когда, съ открытіемъ не-Эвклидовыхъ геометрій, выяснилось (вопреки ученію тогдашнихъ философовъ, съ Кантомъ во главѣ), что наши представленія о пространствѣ не являются абсолютными, что мыслящія существа, живущія въ иныхъ физическихъ условіяхъ, создали бы иную геометрію, отличную отъ Эвклидовой *),—то уже самъ собою всталъ вопросъ: какія пространственныя представленія воспитались бы у обитателей міра, отличающагося отъ нашего числомъ

*) См. объ этомъ статью «Не-Эвклидова геометрія», въ особенности разсужденіе на стр. 51—52.

измѣреній? Здѣсь, конечно, естественно было обратиться къ мірамъ низшаго числа измѣреній (перваго или второго), хорошо нами изученнымъ.

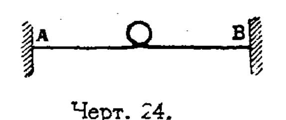
Германскому физику Гельмгольцу принадлежитъ, кажется, слѣдующее разсужденіе, ставшее съ тѣхъ поръ классическимъ. Представимъ себѣ какой-нибудь двумѣрный міръ, напр., плоскость—и на ней самыя разнообразныя фигуры: треугольники, квадраты, круги и т. п. Предположимъ, что нѣкоторыя изъ этихъ фигуръ одарены способностью самостоятельно передвигаться въ своей плоскости, подобно нашимъ одушевленнымъ существамъ, но пусть эти фигуры такъ же не могутъ уйти изъ своего двумѣрнаго міра, какъ мы не можемъ никуда скрыться изъ нашего пространства, или, чтобы быть ближе къ разбираемому примѣру, какъ не можетъ отдѣлиться отъ земли тѣнь человѣка, идущаго по открытому мѣсту. Допустимъ далѣе, что среди нашихъ одушевленныхъ двумѣрныхъ существъ есть такія, которыя одарены высшей организаціей—«люди-тѣни», мыслящіе и создающіе свою культуру. Если эта культура находится въ такой же стадіи развитія, что и наша, то въ «двумѣрныхъ школахъ» преподаютъ геометрію, но это, конечно, только планиметрія, и если спросить образованнаго «двумѣрца», сколько взаимноперпендикулярныхъ прямыхъ проходятъ черезъ одну точку, онъ навѣрно отвѣтитъ: «двѣ»; представленіе о третьей прямой, перпендикулярной къ первымъ двумъ, будетъ такъ же чуждо его сознанію, какъ для насъ представленіе о четвертомъ перпендикулярѣ къ тремъ осямъ пространственной прямоугольной системы Декартовыхъ координатъ.

Присмотримся теперь ближе къ «быту» воображаемыхъ двумѣрныхъ жителей. Чтобы сдѣлать ихъ плоскій міръ болѣе похожимъ на нашъ, предположимъ, что предметы этого міра обладаютъ свойствомъ, аналогичнымъ тому, что физики разумѣютъ подъ «непроницаемостью». Въ этомъ будетъ отличіе предметовъ разсматриваемаго двумѣрнаго царства отъ нашихъ темныхъ тѣней, такъ какъ послѣднія могутъ цѣликомъ покрывать другъ друга.

Нетрудно придумать такую физическую ситуацію, при которой это требованіе выполнялось бы. Вообразимъ, напримѣръ, двѣ взаимно паралел-

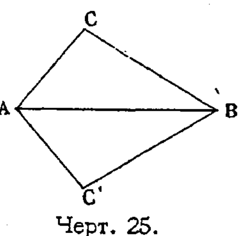
лельныя матеріальныя плоскости, расположенныя горизонтально, изъ которыхъ верхняя, положимъ, стеклянная и освѣщается сверху; если на верхней плоскости будутъ находиться одинаковаго радіуса шары, одни—покоящіеся, а другіе—катящіеся, то тѣни этихъ шаровъ на нижней плоскости будутъ только входить въ прикосновеніе другъ съ другомъ, но никогда не покроютъ другъ друга.

Жилища людей-тѣней будутъ представлять собою не что иное, какъ замкнутые контуры, почему-либо для этихъ людей непроницаемые. Напр., если шаръ, лежащій на стеклянномъ потолкѣ окружимъ твердымъ непрозрачнымъ барьеромъ, то тѣнь шара на полу будетъ поймана въ плѣнъ. Если мы—существа трехмѣрные—перебросимъ шаръ черезъ барьеръ, то жители «міра тѣней» будутъ наблюдать «чудесное» явленіе: какъ предметъ, заключенный въ закрытое со всѣхъ сторонъ помѣщеніе, вышелъ изъ него безъ пролома «стѣны». Вообще, вмѣшиваясь въ жизнь плоскаго міра, мы могли бы производить тамъ самыя диковинныя и непонятныя двумѣрцамъ явленія. Трехмѣрный хирургъ могъ бы совершить операцію надъ внутренностями двумѣрнаго паціента, совершенно не прикасаясь къ кожѣ послѣдняго: для этого достаточно было бы вводить инструменты въ тѣло оперируемаго изъ трехмѣрнаго пространства. Сдѣланная изъ гибкой, не имѣющей толщины нити, петля (подобная изображенной на черт. 24), концы которой закрѣплены въ точкахъ A и B, должна представляться жителямъ двумѣрнаго пространства «Гордіевымъ узломъ», который можно только разрубить, но не развязать. Двумѣрнаго собственника, охраняющаго свое имущество при помощи такихъ запоровъ, могъ бы безпощаднымъ и совершенно непонятнымъ для него образомъ обокрасть трехмѣрный воръ. Мы не будемъ подробнѣе останавливаться на этихъ соображеніяхъ, которыя къ тому же встрѣчаются въ большинствѣ популярныхъ статей о четвертомъ измѣреніи. Считаемъ только нужнымъ предостеречь читателя отъ излишняго увлеченія подобными разсужденіями: чтобы послѣднія обладали убѣдительностью, надо установить точныя условія относительно возможнаго взаимоотношенія плоскаго и трехмѣрнаго міровъ, а этого обыкновенно не дѣлается.

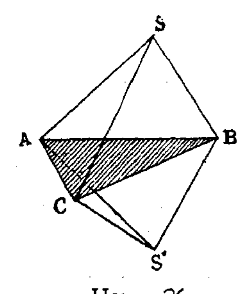


Черт. 24.

Вернемся къ вопросамъ болѣе точнаго характера. Выше было сказано, что двумѣрные (плоскіе) геометры могли бы создать планиметрію, подобную нашей. Это не совсѣмъ такъ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы въ геометріи, созданной двумѣрцами, равенство фигуръ опредѣлялось бы такъ, какъ у насъ, т.-е. равными назывались бы такія фигуры, которыя при наложеніи совмѣщаются, то могло бы случиться, что два треугольника, имѣя по три соотвѣтственно равныхъ стороны, были бы все-таки не равны другъ другу. Таковы, напримѣръ, треугольники *ABC* и *ABC'* (черт. 25), симметричные относительно общей стороны *AB*. Легко видѣть, что передвигая одинъ изъ этихъ треугольниковъ въ его плоскости (иныя движенія, какъ напр., переворачиваніе треугольника другой стороной, двумѣрцамъ недоступны), мы никогда не приведемъ его къ совпаденію со вторымъ треугольникомъ. Нѣчто подобное наблюдаемъ мы, трехмѣрныя существа, по отношенію къ тѣламъ нашего пространства: двѣ пирамиды, ограниченныя четырьмя совершенно одинаковыми гранями, напр., пирамиды *SABC* и *S'ABC*, симметричныя относительно общей грани *ABC*—не могутъ быть приведены въ совмѣщеніе, точно такъ же, какъ не можетъ быть правая перчатка вложена въ лѣвую. Подобно тому, какъ мы, имѣя двѣ пирамиды, составленныя изъ одинаковыхъ элементовъ (реберъ, граней и т. п.), вынуждены различать два случая: равенства (конгруэнтности, совмѣстимости), и симметричности—точно такъ же въ геометріи двумѣрцевъ мѣсто нашей теоремы о равенствѣ треугольниковъ по тремъ сторонамъ должна занимать такая: «треугольники, имѣющіе по три соотвѣтственно равныя стороны, *либо равны* (конгруэнтны), *либо симметричны*».



Черт. 25.



Черт. 26.

Изложенныя соображенія относительно плоскаго міра имѣли цѣлью подготовить читателя къ воспріятію основной идеи этой статьи—идеи *четырехмѣрнаго пространства*.

Разсуждая по аналогіи, нельзя ли предположить, что всѣ предметы нашего трехмѣрнаго пространства служатъ какъ бы «тѣнями» (проекціями) предметовъ другого, недоступнаго пока воображенію, четырехмѣрнаго міра, играющаго по отношенію къ намъ ту же роль, какую обычное пространство играетъ по отношенію къ плоскому міру Гельмгольца? То обстоятельство, что наше воображеніе отказывается въ данномъ случаѣ служить, не должно насъ смущать: вѣдь представляется довольно естественнымъ, что разсмотрѣнные выше «люди-тѣни» не постигаютъ третьяго измѣренія*). Наконецъ, способность воображать сложные геометрическіе образы допускаетъ непрерывное совершенствованіе (пусть изучавшіе аналитическую геометрію припомнятъ, сразу ли имъ далось представленіе объ однополомъ гиперболоидѣ, какъ поверхности, образуемой движеніемъ прямой), и было бы излишнимъ малодушіемъ сразу сложить оружіе передъ трудностями, порождаемыми четвертымъ измѣреніемъ. Вспомнимъ далѣе, что не-Эвклидовы геометріи—это общепризнанное и цѣнное пріобрѣтеніе современной науки—также не находятъ себѣ опоры въ нашей интуиціи. Ниже мы увидимъ, что эти два дефекта нашего воображенія—по отношенію къ не-Эвклидовой геометріи и къ четвертому измѣренію—находятся въ тѣсной связи.

Что касается мотивовъ, заставляющихъ обращаться къ четырехмѣрному пространству, то они различны у представителей различныхъ отраслей знанія.

Математики ожидаютъ отъ четвертаго измѣренія изящныхъ обобщеній и наведеній, подобныхъ тѣмъ, которыя достигнуты посредствомъ безконечно-удаленныхъ элементовъ, не-Эвклидовыхъ геометрій и т. п.

Съ другой стороны, четырехмѣрное пространство привлекаетъ вниманіе людей, стоящихъ часто въ сторонѣ отъ чистой математики. Здѣсь на первомъ мѣстѣ слѣдуетъ назвать спиритовъ, приписывающихъ вмѣшательству четырехмѣрныхъ существъ тѣ «чудеса», которыя, по увѣреніямъ адептовъ спиритизма, имѣютъ

*) Не безъ основанія полагаютъ, что и нѣкоторыя насѣкомыя лишены этой способности. Таковы, быть можетъ, извѣстные многимъ «водяные пауки», проводящіе всю свою жизнь на поверхности родного болота.

мѣсто на ихъ сеансахъ. Хотя заслуженное недовѣріе, которое широкая публика питаетъ къ ученію спиритовъ, не мало скомпрометировало самую идею четырехмѣрнаго пространства, однако, справедливость требуетъ отмѣтить, что къ этому ученію примыкаютъ отдѣльныя лица, научная добросовѣстность которыхъ свободна отъ подозрѣній; таковы, напр., германскій физико-астрономъ *Цёльнеръ*, русскій химикъ проф. *Бутлеровъ*, извѣстный популяризаторъ *Фламмаріонъ* и др. Эти ученые печатно удостовѣряютъ, что наблюдали при обстановкѣ, исключающей всякія злоупотребленія,—исчезновенія предметовъ, заключенныхъ въ замкнутое пространство, развязываніе узловъ веревки, концы которой закрѣплены (послѣднему случаю аналогична упоминавшаяся «петля» двумѣрцевъ) и т. п. Основываясь на аналогіи съ описаннымъ выше воображаемымъ вмѣшательствомъ трехмѣрныхъ существъ въ жизнь двумѣрнаго міра (напоминаемъ еще разъ, что эти разсужденія не безупречны), Цёльнеръ, Бутлеровъ и др. полагали, что разгадку наблюдавшихся ими явленій слѣдуетъ искать за предѣлами нашего пространства, въ мірѣ четырехъ измѣреній.

Въ концѣ статьи мы еще вернемся къ взаимоотношенію между четырехмѣрнымъ пространствомъ и остальными отраслями знанія, а пока постараемся уяснить въ общихъ чертахъ, что такое геометрія четырехъ измѣреній съ чисто-математической точки зрѣнія.

Геометрія четырехъ измѣреній.

Для математика предоставляются два пути къ изученію, вѣрнѣе къ созданію четырехмѣрнаго пространства.

Съ одной стороны, это пространство можетъ быть построено чисто аналитически *). *Точкой* въ пространствѣ четырехъ измѣреній будемъ называть совокупность 4-хъ вещественныхъ чиселъ (x, y, z, t), данныхъ въ извѣстномъ порядкѣ; подъ разстояніемъ двухъ точекъ (x, y, z, t), и (x_1, y_1, z_1, t_1) будемъ разумѣть число

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2+(t-t_1)^2}$$

*) Сравн. «Не-Эвклидова геометрія», стр. 54.

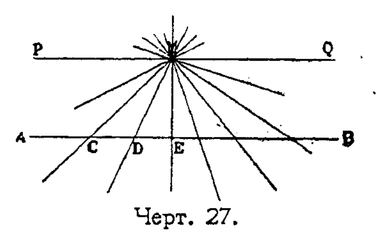
(это будетъ, такъ сказать, Эвклидово 4-мѣрное пространство; при другомъ выборѣ формулы разстоянія получатся 4-мѣрныя пространства, аналогичныя не-Эвклидовымъ); будемъ опредѣлять новые геометрическіе образы (линіи, поверхности и т. д.), при помощи уравненій между *четырьмя* перемѣнными x, y, z и t и т. д. Такой путь изученія имѣетъ слѣдующія преимущества. Извѣстно, (см. «Не-Эвклидова геом.», стр. 59), что когда, въ концѣ минувшаго столѣтія, понадобилось подвести прочный фундаментъ подъ нашу обычную геометрію, то прибѣгли къ міру чиселъ и построили «3-мѣрное аналитическое пространство». Поэтому представляется естественнымъ, чтобы новое геометрическое ученіе сразу строилось на этомъ надежномъ основаніи, а не повторяло ошибки исторической геометріи.

Однако, этотъ путь ведетъ къ слишкомъ абстрактному изложенію, и мы вынуждены въ настоящемъ краткомъ очеркѣ избрать другой—путь *геометрической аналогіи*. И такой способъ изученія приводитъ къ хорошимъ результатамъ (иногда даже быстрѣе, чѣмъ первый), а для сомнительныхъ случаевъ въ нашемъ распоряженіи всегда вѣдь остается аналитическій методъ.

Итакъ, будемъ строить четырехмѣрное пространство, какъ послѣдующую ступень въ ряду понятій: точка, прямая, плоскость, пространство (обычное). Послѣднимъ понятіямъ мы будемъ приписывать ихъ *Эвклидово* содержаніе, и то четырехмѣрное пространство, которое мы строимъ, будетъ также Эвклидова типа *); условимся называть его «сверхпространствомъ» (вообще приставка «сверх» будетъ въ дальнѣйшемъ обозначать переходъ отъ трехмѣрнаго образа къ аналогичному четырехмѣрному). Присмотримся теперь—на примѣрѣ доступныхъ нашему воображенію образовъ,—какъ совершается переходъ отъ низшаго измѣренія къ высшему. Чтобы перейти отъ прямой къ плоскости, достаточно допустить, что внѣ прямой (AB) существуетъ точка (M); соединимъ эту точку со всѣми точками данной прямой (AB); получимъ новое геометрическое мѣсто точекъ, а именно, тѣхъ, которыя лежатъ на всѣхъ соединяющихъ прямыхъ (MC,

*) Возможны еще и не-Эвклидовы четырехмѣрныя геометріи, аналогичныя трехмѣрнымъ геометріямъ Лобачевскаго, Римана и др., но здѣсь мы ихъ касаться не будемъ.

MD, ME...) — это и будетъ плоскость. Правда, изъ полученной, такимъ путемъ плоскости какъ бы выпадаетъ прямая *PMQ*, параллельная *AB*, но это неудобство устраняется, если оговорить, что точка (*M*) должна быть соединена не только съ конечными, но и съ безконечно-удаленной точкой прямой (*AB*) (см. статью «Безк.-удаленные элементы»). Равнымъ образомъ для перехода отъ плоскости къ пространству, беремъ внѣ плоскости точку и соединяемъ ее со всѣми (въ томъ числѣ и съ безконечно-удаленными) точками плоскости.



Черт. 27.

Совершенно аналогичнымъ путемъ будемъ строить четырехмѣрное пространство. Примемъ всѣ постулаты обычной геометріи и, сверхъ того, слѣдующій новый: *«внѣ пространства существуетъ точка»*. Такъ какъ въ числѣ принятыхъ постулатовъ имѣется такой: «черезъ всякія двѣ точки проходятъ прямая», — то мы можемъ говорить о прямыхъ, соединяющихъ нашу внѣпространственную точку со всѣми точками пространства (въ томъ числѣ и съ безконечно-удаленными, т.-е. съ точками такъ называемой «безконечно-удаленной плоскости»); совокупность точекъ всѣхъ этихъ соединяющихъ прямыхъ будемъ называть *сверхпространствомъ*. — Мы не имѣемъ въ виду развивать здѣсь систематически тѣ слѣдствія, которыя проистекаютъ отъ введенія новаго постулата. Ограничимся поэтому перечисленіемъ главнѣйшихъ свойствъ сверхпространства, не останавливаясь на ихъ объясненіи тамъ, гдѣ аналогія черезчуръ ясна.

Подобно тому, какъ мы можемъ мысленно наполнить наше пространство всевозможными плоскостями и кривыми поверхностями, — такъ и сверхпространство содержитъ безчисленное множество пространствъ, подобныхъ нашему, а также различныя «кривыя 3-мѣрныя пространства», къ которымъ примѣняется геометрія Лобачевскаго, Римана и др. *). Пересѣченіе, т.-е.

*) Выше мы уже намекали на то, что неспособность наша къ наглядному воззрѣнію въ области трехмѣрныхъ не-Эвклидовыхъ пространствъ и таковая же неспособность по отношенію къ сверхпространству — проистекаютъ изъ общаго источника. Теперь эта мысль должна сдѣлаться яснѣе. Въ самомъ дѣлѣ, спустимся на одно измѣреніе ниже. Плоскіе люди Гельмгольца не

совокупность общихъ точекъ двухъ несовпадающихъ пространствъ есть, вообще говоря, нѣкоторая поверхность. Такъ, два Эвклидова пространства пересѣкаются въ сверхпространствѣ по плоскости, три пространства—по прямой.—Взаимное расположеніе плоскостей въ сверхпространствѣ представляетъ гораздо больше разнообразія, чѣмъ у насъ. Двѣ плоскости могутъ не имѣть общей прямой и въ то же время не быть параллельными (вспомнимъ прямыя, «скрещивающіяся» въ пространствѣ). Черезъ одну прямую въ сверхпространствѣ можно провести безчисленное множество плоскостей, перпендикулярныхъ къ данной плоскости; всѣ онѣ, вмѣстѣ взятыя, составляютъ «пространство, перпендикулярное къ данной плоскости».

Перечисленныя до сихъ поръ теоремы четырехмѣрной геометріи могутъ быть получены, какъ, вѣроятно, уже замѣтилъ читатель, изъ теоремъ обыкновенной стереометріи посредствомъ автоматической замѣны терминовъ:

«точка, прямая, плоскость, пространство»

соотвѣтственно терминами:

«прямая, плоскость, пространство, сверхпространство».

Не слѣдуетъ, однако, думать, что этимъ путемъ можетъ быть получено всякое предложеніе четырехмѣрной геометріи. И даже можно заранѣе предвидѣть, въ какихъ случаяхъ упомянутый автоматическій переходъ откажется служить. Вѣдь во второмъ изъ приведенныхъ выше рядовъ терминовъ отсутствуетъ «точка»; иначе, точка сверхпространства не имѣетъ себѣ аналога въ пространствѣ *). Вслѣдствіе этого, тѣ предложенія «сверхгеометріи», въ которыхъ фигурируетъ *точка*, не имѣютъ себѣ непосредственныхъ прообразовъ въ обыкновенной геометріи. Возьмемъ, на-

---

знаютъ, что такое шаръ, потому что никакая часть сферической поверхности не умѣщается въ плоскости. Если бы существовалъ «плоскій Лобачевскій», который развилъ бы чисто умозрительнымъ путемъ, напр., сферическую геометрію, то большинство плоскихъ людей, вѣроятно, встрѣтило бы его открытіе съ такимъ же недовѣріемъ, какое проявили въ прошломъ столѣтіи многіе наши «ученые» (См. «Не-Эвклид. геом.» стр. 43). Къ счастью, математическое мышленіе преодолѣваетъ, какъ видимъ, тѣ препятствія, которыя ставятся узкими рамками нашего опыта.

*) Любопытно, впрочемъ, отмѣтить, что роль такого аналога играетъ отчасти терминъ «отсутствіе точки». Напр., приводимое ниже предложеніе: «двѣ плоскости въ сверхпространствѣ имѣютъ, вообще говоря, только одну общую точку», можно разсматривать, какъ аналогичное извѣстному предложенію: «двѣ прямыя въ пространствѣ, вообще говоря, не пересѣкаются».

примѣръ, такую основную въ сверхгеометріи теорему: «двѣ плоскости въ сверхпространствѣ имѣютъ, вообще говоря, только одну общую точку». Чтобы убѣдиться въ справедливости этого утвержденія, обратимся къ наиболѣе надежному источнику—къ аналитическому представленію четырехмѣрнаго пространства. Подобно тому, какъ въ обыкновенной аналитической геометріи одно линейное уравненіе съ тремя перемѣнными изображаетъ собою плоскость,—такъ въ сверхгеометріи одно уравненіе съ четырьмя перемѣнными вида

$$Ax+By+Cz+Dt+E=0\ldots(1)$$

служитъ уравненіемъ нѣкотораго Эвклидова пространства. Плоскость можно разсматривать, какъ пересѣченіе двухъ пространствъ, и опредѣлять двумя уравненіями вида (1). Слѣдовательно, пересѣченіе двухъ плоскостей будетъ опредѣляться четырьмя линейными уравненіями съ четырьмя перемѣнными x, y, z, t; но такая система уравненій допускаетъ, вообще говоря, только одно рѣшеніе—значитъ двѣ плоскости имѣютъ, вообще говоря, только одну общую точку. Тотъ случай, когда двѣ плоскости пересѣкаются по прямой, является уже частнымъ; онъ будетъ имѣть мѣсто, когда обѣ плоскости принадлежатъ къ одному пространству, или—возвращаясь къ аналитической постановкѣ вопроса,—когда одно изъ вышеупомянутыхъ четырехъ уравненій будетъ слѣдствіемъ трехъ остальныхъ.

Ограниченная часть сверхпространства называется *сверхтѣломъ*. Понятно, что граница сверхтѣла состоитъ изъ трехмѣрныхъ тѣлъ. Многогранникамъ нашего пространства соотвѣтствуютъ сверхтѣла, ограниченныя многогранниками,—такія сверхтѣла называютъ часто *многоячейниками*. Каковъ «простѣйшій» многоячейникъ? На плоскости, простѣйшій изъ многоугольниковъ (треугольникъ) опредѣляется тремя точками, не лежащими на одной прямой; въ пространствѣ, простѣйшій многогранникъ (тетраедръ, четырегранникъ)—четырьмя точками, не лежащими на одной плоскости. Аналогично этому, простѣйшимъ многоячейникомъ будетъ «пятиячейникъ»; онъ опредѣляется пятью точками, не принадлежащими къ одному и тому же Эвклидову пространству, и ограниченъ пятью тетраедрами.

Возможность изучать многоячейники не покажется намъ парадоксальной, если вспомнимъ, что вѣдь и тѣла нашего трехмѣрнаго пространства мы изучаемъ большей частью по ихъ плоскимъ изображеніямъ, т.-е. по ихъ проекціямъ на пространство низшаго числа (двухъ) измѣреній. Методъ проекцій, въ своемъ высшемъ развитіи, приводитъ, какъ извѣстно, къ «начертательной геометріи», которая учитъ, какъ по двумъ плоскимъ чертежамъ возстановить свойства спроектированнаго тѣла. Примѣняя тотъ же принципъ къ сверхпространству, можно попытаться изучить сверхтѣла по ихъ «проекціямъ на пространство», осуществляя эти проекціи при помощи нитяныхъ или проволочныхъ, трехмѣрныхъ моделей.

Не вдаваясь въ большія подробности относительно «начертательной геометріи сверхпространства», мы ограничимся здѣсь разъясненіемъ того, къ какимъ результатамъ приводитъ одинъ изъ способовъ проектированія, именно способъ центральной (конической) проекціи, аналогичный «линейной перспективѣ» обыкновенной геометріи *). Способъ этотъ мы примѣнимъ къ интересной группѣ сверхтѣлъ, къ такъ называемымъ «правильнымъ многоячейникамъ», о которыхъ поэтому умѣстно сказать нѣсколько словъ.

Многоячейникъ называется правильнымъ, если онъ 1) ограниченъ правильными многогранниками и 2) углы (четырехмѣрные **) при вершинахъ его равны.

Подобно тому, какъ въ нашемъ пространствѣ существуетъ всего *пять* правильныхъ многогранниковъ: тетраедръ, эксаедръ (кубъ), октаедръ, додекаедръ и икосаедръ—такъ въ сверхпространствѣ оказываются возможными только 6 правильныхъ многоячейниковъ (изъ нихъ простѣйшій—правильный пятиячейникъ); мы будемъ отмѣчать ихъ знакомъ Z_n, гдѣ n показываетъ число ограничивающихъ многогранниковъ. Вотъ таблица элементовъ (вершинъ, граней и т. д.) шести правильныхъ многоячейниковъ $Z_5 \ldots Z_{600}$.

---

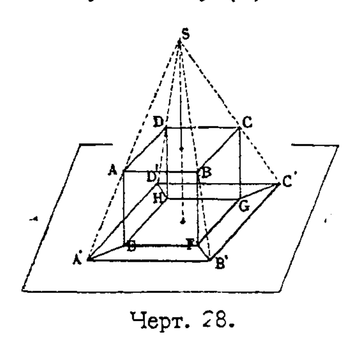
*) См. статью «Начертательная геометрія», стр. 72.

**) Здѣсь имѣется въ виду четырехмѣрный уголъ, опредѣляемый нѣсколькими полупрямыми, исходящими изъ одной точки и не принадлежащими къ одному и тому же 3-мѣрному пространству (сравн. опредѣленіе многограннаго угла). Два четырехмѣрныхъ угла считаются равными, если они могутъ быть приведены въ совмѣщеніе движеніемъ въ сверхпространствѣ.

	Z_5	Z_8	Z_{16}	Z_{24}	Z_{120}	Z_{600}
Ограниченъ	тетра-едрами.	куба-ми.	тетра-едрами.	окта-едрами.	додека-едрами.	тетра-едрами.
Число ограничивающихъ многогранниковъ (ячеекъ)	5	8	16	24	120	600
Число плоскихъ граней (правильные многоугольники)	10	24	32	96	600	1200
Число реберъ	10	32	24	96	1200	720
Число вершинъ	5	16	8	24	720	120

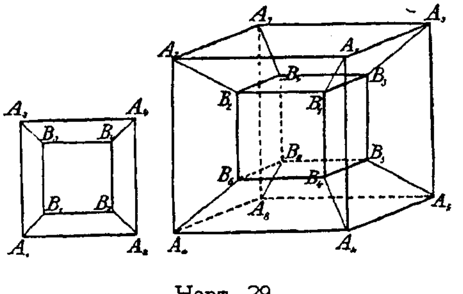
Чтобы дать представленіе о томъ, какъ составляется такая таблица, остановимся подробнѣе на подсчетѣ элементовъ многоячейника Z_8, который можетъ быть названъ «сверхкубомъ» и который въ четырехмѣрномъ Эвклидовомъ пространствѣ служитъ естественной единицей для измѣренія «сверхобъемовъ». Сверхкубъ получается передвиженіемъ куба въ направленіи, перпендикулярномъ къ нашему пространству (такимъ образомъ попытки представить себѣ это передвиженіе будутъ безплодны) на разстояніе, равное ребру куба (припомнимъ аналогичное образованіе куба изъ квадрата). Итакъ, имѣемъ: 1) начальное положеніе движущагося куба и 2) конечное его положеніе въ параллельномъ пространствѣ; такъ какъ кубъ имѣетъ 8 вершинъ, то два упомянутыхъ крайнихъ положенія его опредѣляютъ собою 16 вершинъ сверхкуба. Далѣе, у начальнаго куба 12 реберъ, у конечнаго 12; при движеніи каждая изъ 8 вершинъ куба описываетъ по ребру—итого 32 ребра. Переходя къ плоскимъ гранямъ, которыя въ данномъ случаѣ будутъ квадратами, имѣемъ: у начальнаго куба 6 граней, у конечнаго 6; при движеніи каждое изъ 12 реберъ куба описываетъ по грани, итого 24 грани. Наконецъ, ограничивающихъ кубовъ будетъ *восемь*: 1 начальный, 1 конечный и 6, описанныхъ движеніемъ 6-ти граней исходнаго куба. Мы сейчасъ дадимъ болѣе наглядное представленіе этихъ результатовъ при помощи упомянутыхъ выше «моделей».

Вернемся къ проектированію сверхтѣлъ на наше пространство. Для того, чтобы увѣреннѣе разсуждать по аналогіи, припомнимъ сначала, какой видъ имѣетъ плоская центральная проекція куба. Если совмѣстимъ одну изъ граней куба съ проекціонной плоскостью, изъ центра этой грани возставимъ къ ней перпендикуляръ (внутрь куба), и на продолженіи перпендикуляра возьмемъ внѣ куба точку (S) за центръ проекцій, то вершины A, B, C и D куба спроектируются соотвѣтственно въ точки A', B', C' и D'; плоскимъ изображеніемъ всего куба будетъ служить фигура $A'B'C'D'-EFGH$ (въ такомъ видѣ представляются намъ контуры стекляннаго куба съ очерченными ребрами, если смотрѣть на этотъ кубъ сверху, закрывъ одинъ глазъ). При этомъ 1) верхній квадратъ $ABCD$ проектируется на плоскость въ увеличенномъ видѣ, 2) нижній квадратъ $EFGH$ сохраняетъ свои размѣры и помѣщается внутри перваго квадрата ($A'B'C'D'$), 3) четыре боковыхъ квадрата преобразуются въ равнобедренныя трапеціи.

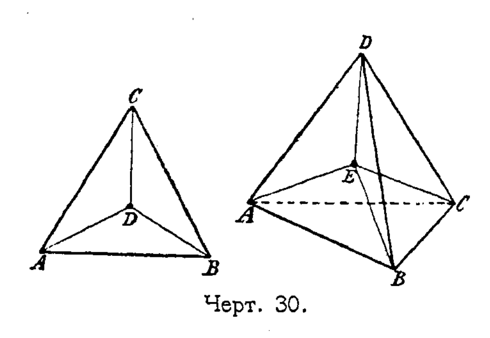


Черт. 28.

Теперь, слѣдуя мысли германскаго математика Шлегеля, поднимемся на одну ступень выше (въ смыслѣ числа измѣреній) и будемъ проектировать сверхкубъ на наше пространство, предполагая, что въ послѣднемъ находится одинъ изъ ограничивающихъ кубовъ — напр., конечный кубъ. Тогда (черт. 29) 1) начальный кубъ представится у насъ въ увеличенномъ размѣрѣ $A_1\ A_2 \ldots A_6$, 2) конечный кубъ $B_1\ B_2 \ldots B_6$ сохранитъ свою величину и окажется лежащимъ внутри перваго куба; 3) 6 остальныхъ изъ ограничивающихъ сверхкубъ кубовъ преобразуются въ правильныя усѣченныя четыреугольныя пирамиды. Соотвѣтствую-

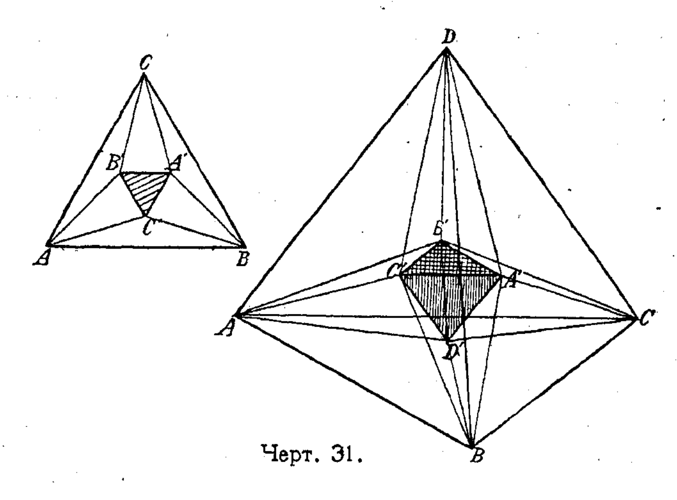

Черт. 29.

щую модель можно сдѣлать изъ проволоки и нитей; черт. 29 даетъ плоское изображенiе такой модели (не слѣдуетъ забывать, что это уже будетъ «проекцiя проекцiи»); рядомъ, слѣва, помѣщена для сравненiя описанная выше (см. черт. 28) центральная проекцiя обыкновеннаго куба. Теперь легко подсчитать элементы сверхкуба и убѣдиться въ правильности приведенныхъ выше цифръ.



Черт. 30.

Предоставляемъ читателю проанализировать въ томъ же порядкѣ прилагаемые здѣсь чертежи моделей, соотвѣтствующихъ другимъ правильнымъ многоячейникамъ. Черт. 30 изображаетъ модель многоячейника Z_5, причемъ изъ пяти ограничивающихъ тетраедровъ, одинъ представленъ тетраедромъ $ABCD$, а четыре остальныхъ имѣютъ общую вершину въ центрѣ E послѣдняго; рядомъ, слѣва, показана плоская проекцiя обыкновеннаго правильнаго тетраедра. На черт. 31



Черт. 31.

изображена модель правильнаго многоячейника Z_{16}, и рядомъ проекцiя октаедра. Остальные три многоячейника Z_{24}, Z_{120} и Z_{600}

представляются уже значительно болѣе сложными, вслѣдствіе чего здѣсь мы ихъ не помѣщаемъ.

Заканчивая этотъ элементарный обзоръ свойствъ сверхпространства, умѣстно сказать еще о двухъ, имѣющихся въ нашемъ распоряженіи, средствахъ до нѣкоторой степени «пріобщаться» къ этому недоступному обычнымъ воспріятіямъ міру.

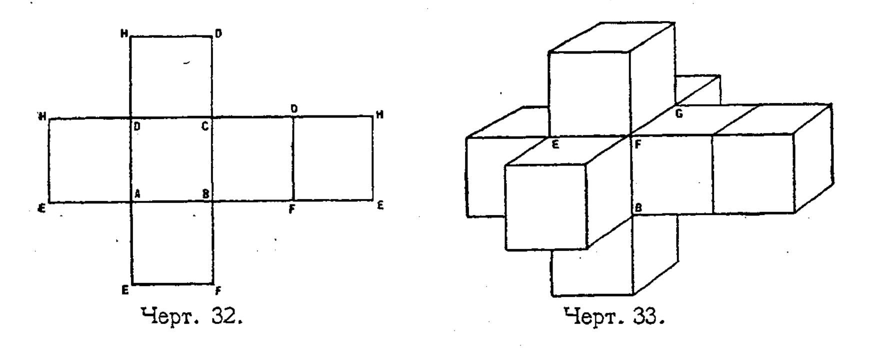
Подобно тому, какъ біологъ составляетъ себѣ представленіе о микроорганизмѣ, разсматривая подъ микроскопомъ тончайшіе параллельные срѣзы (шлифы) съ изучаемаго тѣла, такъ и мы, имѣя передъ собою рядъ послѣдовательныхъ пересѣченій сверхтѣла съ обыкновеннымъ пространствомъ (эти пересѣченія будутъ конечно, обыкновенными тѣлами, модели которыхъ можно изготовить), можемъ — по выраженію проф. Ричмонда—какъ бы «чувствовать» незримое присутствіе сверхтѣла. Для поясненія этой мысли обратимся снова къ двумѣрному міру Гельмгольца. Если какое-нибудь тѣло, напр., шаръ проходитъ сквозь такой міръ, (напр., шаръ погружается въ воду, поверхность которой мы представляемъ себѣ населенной двумѣрными существами), и если точки этого шара, находящіяся въ данный моментъ на разсматриваемой плоскости, доступны воспріятію двумѣрныхъ ея жителей, то послѣдніе должны наблюдать слѣдующее явленіе: въ полѣ ихъ зрѣнія сперва появляется точка, которая потомъ, разрастаясь, принимаетъ форму круга; поперечникъ этого круга сначала возрастаетъ, достигаетъ максимума (когда въ плоскость вступитъ центръ шара), а затѣмъ снова уменьшается, кругъ обращается въ точку и исчезаетъ. Аналогично этому, сверхшаръ*), вступая въ наше пространство, представится сначала въ видѣ точки, затѣмъ въ видѣ шара съ постепенно растущимъ поперечникомъ, затѣмъ шаръ начнетъ стягиваться, обратится въ точку и исчезнетъ. Если, напр., сверхшаръ имѣетъ радіусъ въ 5 м., то нетрудно подсчитать, что послѣдовательныя сѣченія сверхшара пространствами, отстоящими другъ отъ друга на 1 м., будутъ шары радіусовъ (въ метрахъ)

$$0;\ 3\ (=\sqrt{9});\ 4\ (=\sqrt{16});\ \sqrt{21};\ \sqrt{24};\ \sqrt{24};\ \sqrt{21};\ 4;\ 3;\ 0.$$

*) Сверхшаръ радіуса r есть геометрическое мѣсто точекъ сверхпространства, отстоящихъ на разстояніе r отъ данной точки.

(читатель, знакомый съ элементами аналитической геометрiи, легко провѣритъ эти числа, написавъ уравненiя сверхшара $x^2+y^2+z^2+t^2=25$ и давая t послѣдовательно значенiя 5, 4, 3, 2,......). Можно взять гораздо болѣе «частыя» сѣченiя сверхшара параллельными равноотстоящими другъ отъ друга, пространствами, изготовить соотвѣтствующiя модели шаровъ-сѣченiй, и даже сдѣлать измѣненiе послѣднихъ непрерывнымъ при помощи кинематографа. Не слѣдуетъ, однако, обманываться насчетъ результатовъ, къ которымъ приведетъ такой опытъ: измѣняющiйся шаръ, разсматриваемый, какъ сѣченiе сверхтѣла, характеренъ не только для сверхшара, но и для множества другихъ сверхтѣлъ (напр., для «сверхтѣлъ вращенiя»).

Перейдемъ теперь къ другому способу косвеннаго знакомства съ сверхтѣлами. Въ полѣ зрѣнiя жителей плоскаго мiра не умѣщается кубъ, но зато они могутъ изучать «развертку ку-



Черт. 32.

Черт. 33.

ба», представленную на черт. 32. Аналогично этому, мы можемъ представить себѣ «пространственную развертку» сверхкуба, которую легко осуществить при помощи 8 деревянныхъ кубиковъ, сложенныхъ, какъ показываетъ черт. 33 (одинъ изъ кубиковъ не виденъ—онъ находится внутри). Мы можемъ здѣсь «осязать» тѣ самые 8 кубиковъ, которые, будучи перенесены въ сверхпространство и сложены тамъ какъ-то по иному, образуютъ четырехмѣрное тѣло—сверхкубъ.

Быть можетъ, все изложенное покажется многимъ игрой досужей фантазіи. Поэтому представляется умѣстнымъ заключительную часть этой статьи посвятить обзору тѣхъ приложеній, которыя молодое ученіе о многомѣрныхъ геометріяхъ нашло себѣ въ различныхъ областяхъ научной мысли. Начнемъ съ чистой математики.

Четвертое измѣреніе и классическая математика.

Анализъ (преимущественно **теорія функцій.**). Здѣсь роль многомѣрныхъ геометрій наиболѣе скромная и наименѣе оспариваемая. Въ теоріи функцій издавна принято называть совокупность фиксированныхъ значеній n перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$ *точкой въ n-мѣрномъ пространствѣ*; говорить, что функція обладаетъ нѣкоторымъ свойствомъ въ *прямоугольной n-мѣрной области* если это свойство имѣетъ мѣсто для значеній перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, заключенныхъ въ интервалахъ

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \quad a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \ldots\ldots a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$$

и т. п. Однимъ словомъ, здѣсь пользуются только *языкомъ* многомѣрныхъ геометрій. Выгода такого пріема очевидна: съ одной стороны—болѣе сжатая терминологія, съ другой—возможность иллюстрировать отвлеченныя положенія теоріи функцій на конкретныхъ геометрическихъ образахъ, полагая $n=1, 2$ или 3.

Геометрія. Это—область, съ которой излагаемое ученіе соприкасается наиболѣе непосредственно, и потому приложенія его здѣсь наиболѣе разнообразны.

Какъ извѣстно, исторически планиметрія развивалась слитно съ стереометріей. Достаточно вспомнить, что эллипсъ, парабола и гипербола появились первоначально въ качествѣ «коническихъ сѣченій» (каковая трактовка и понынѣ является одной изъ удобнѣйшихъ для элементарнаго изложенія теоріи этихъ кривыхъ), чтобы понять, какъ плодотворны могутъ быть стереометрическія соображенія для изслѣдованія свойствъ плоскихъ фигуръ. Интересно было поэтому выяснить, не окажется ли четвертое измѣреніе столь же полезнымъ при изученіи трехмѣрнаго пространства? Предположеніе это дѣйствительно подтвердилось новѣйшими изслѣдованіями; къ сожалѣнію, послѣднія относятся

къ области настолько спеціальной, что мы вынуждены ограничиться здѣсь самыми общими указаніями.—Многіе изъ читателей знаютъ, вѣроятно, про «шестиугольникъ Паскаля», играющій такую важную роль въ проективной теоріи коническихъ сѣченій (см. статьи «Проективная геометрія» и «Безконечно-удаленные элементы»). По существу своему, теорема Паскаля входитъ въ составъ болѣе общей теоріи, изучающей соотношенія между 6-ю точками на плоскости и 15-ю ($=C_6^2$) прямыми, соединяющими эти точки попарно. Однако, послѣдовательное развитіе этой теоріи представило огромныя трудности чисто внѣшняго характера: достаточно сказать, что упомянутыя 15 прямыхъ пересѣкаются въ 105 ($=C_{15}^2$), а для болѣе частнаго случая—шестиугольника Паскаля—въ 45 точкахъ, подлежащихъ изученію; выдающійся англійскій геометръ прошлаго столѣтія, *Кели*, говоритъ, что, хотя онъ выполнилъ чертежъ въ очень большомъ масштабѣ, однако, овладѣть этимъ чрезвычайнымъ скопленіемъ точекъ и прямыхъ—задача, превышающая человѣческія силы. Впослѣдствіи оказалось цѣлесообразнымъ перенести все построеніе съ плоскости въ пространство, что съ одной стороны упростило, а съ другой—обобщило задачу. Но и это не все: новѣйшіе изслѣдователи четырехмѣрнаго пространства (Ричмондъ, Жуффре и др.) утверждаютъ, что именно тамъ, въ сверхпространствѣ, заложены корни удивительныхъ свойствъ Паскалева шестиугольника; что только 6 точекъ сверхпространства проливаютъ истинный свѣтъ на сущность предыдущихъ изслѣдованій.—По этому поводу проф. Ричмондъ высказываетъ слѣдующее замѣчаніе, отъ котораго нѣсколько вѣетъ Пиѳагорейской числовой мистикой: «при помощи *четырехъ точекъ на плоскости* (2 измѣренія), геометрія *прямой линіи* (1 измѣреніе) обогащается весьма важнымъ понятіемъ—именно понятіемъ объ «ангармоническомъ отношеніи» *); *пять точекъ пространства* (3 изм.) доставляютъ *плоской геометріи* (2 изм.) понятіе не менѣе фундаментальное—о «гомологіи» треугольниковъ**); наконецъ, фигура, образуемая *6-ю точками сверхпространства* (4 изм.) доставляетъ *простран-*

*) См. статью «Проективная геометрія».

**) *Гомологія*—одно изъ наиболѣе плодотворныхъ понятій проективной геометріи: достаточно сказать, что равенство, симметричность, подобіе фигуръ—это только частные случаи гомологіи.—Входить подробнѣе въ объясненіе словъ проф. Ричмонда мы здѣсь не можемъ.

ству (3 изм.), а съ нимъ и плоскости, весьма существенную «обобщенную теорію Паскалева шестиугольника».

Перейдемъ теперь къ вопросу болѣе общаго характера. Что такое четырехмѣрная геометрія съ точки зрѣнія теоріи множествъ? Это есть ученіе о нѣкоторомъ непрерывномъ многообразіи съ четырьмя параметрами (перемѣнными). Но вѣдь такія многообразія встрѣчаются и въ обыкновенномъ пространствѣ. Возьмемъ, напримѣръ, совокупность всѣхъ сферъ пространства; каждая сфера опредѣляется четырьмя независимыми числовыми данными: тремя координатами центра и радіусомъ. Разсматриваемая совокупность есть, слѣдовательно, многообразіе,—какъ говорятъ, «четырехкратно-протяженное», что символизируется знакомъ ∞^4. Можно поэтому ожидать, что «геометрія сферъ» явится трехмѣрной интерпретаціей (истолкованіемъ) сверхгеометріи; такъ оно и оказывается. Такая интерпретація представляетъ тѣ же выгоды, что и аналогичныя истолкованія не-Эвклидовыхъ геометрій: съ одной стороны, она можетъ послужить чисто-геометрическимъ обоснованіемъ четырехмѣрной геометріи; съ другой стороны, изучая послѣднюю, мы остаемся при сознаніи, что попутно создается математическій аппаратъ, примѣнимый во всякомъ случаѣ къ нѣкоторымъ доступнымъ образамъ нашего пространства. Эти образы въ свою очередь будутъ поддержкой изслѣдователю, потерявшему увѣренность на скользкомъ пути аналогіи.

До сихъ поръ мы старались доказать *цѣлесообразность* примѣненія сверхгеометріи къ изслѣдованію нашего пространства. Въ какой мѣрѣ, однако, такой пріемъ является *необходимымъ*? Нельзя ли получить тѣ же результаты, не выходя изъ рамокъ нашего пространства? Вопросъ можетъ быть поставленъ въ болѣе общемъ видѣ: можетъ ли случиться, что какое-нибудь свойство даннаго пространства (въ широкомъ смыслѣ этого слова: 1-мѣрное, 2-мѣрное и т. д.) недоказуемо, пока мы остаемся въ предѣлахъ этого пространства, но становится доказуемымъ, какъ только перейдемъ къ высшему числу измѣреній? Здѣсь весьма поучительнымъ представляется результатъ, полученный проф. *Гильбертомъ*: онъ показалъ, что одно въ высшей степени важное предложеніе—такъ наз. «теорема Дезарга» *) (для плоскости)

*) См. статью «Проективная геометрія».

не можетъ быть доказана средствами плоской проективной геометріи, но становится сразу доказуемой, какъ только перейдемъ къ стереометрическимъ (проективнымъ же) соображеніямъ. Поэтому нѣтъ ничего невозможнаго въ предположеніи, что нѣкоторыя свойства обыкновеннаго пространства ускользаютъ отъ нашего вниманія именно вслѣдствіе недостаточнаго знакомства съ геометріей 4-го измѣренія.

Роль сверхгеометріи въ общемъ ученіи о пространствѣ была бы нами очерчена неполно, если бы мы еще разъ не остановились здѣсь на новомъ пониманіи не-Эвклидовыхъ геометрій. Трехмѣрныя не-Эвклидовы пространства суть не что иное, какъ *сверхповерхности* въ пространствѣ четырехъ измѣреній. То обстоятельство, что эти пространства имѣютъ «кривизну», «абсолютную единицу длинъ» и т. д. покажется, быть можетъ, болѣе понятнымъ при сопоставленіи съ аналогичными свойствами поверхностей нашего пространства (напр., сфера имѣетъ абсолютную единицу длинъ—это ея радіусъ).

Алгебра и теорія чиселъ. Извѣстно, что уравненія, степень которыхъ не выше 4-ой, разрѣшимы въ радикалахъ, т.-е. приводятся къ двучленнымъ уравненіямъ; теорія этихъ послѣднихъ, въ свою очередь, выигрываетъ въ наглядности отъ сопоставленія съ теоріей *правильныхъ многоугольниковъ*—одинъ изъ примѣровъ проникновенія геометріи въ алгебру. Проникновеніе это становится особенно плодотворнымъ, когда поднимемся ступенью выше и перейдемъ къ уравненію 5-ой степени. Будучи неразрѣшимо въ радикалахъ, уравненіе это можетъ быть, однако, приведено къ нѣкоторымъ болѣе простымъ уравненіямъ, которыя, какъ оказывается, находятся въ глубокой связи съ теоріей одного изъ пяти *правильныхъ многогранниковъ* — икосаедра *). При переходѣ къ уравненіямъ слѣдующихъ—6-ой, 7 ой и т. д.—степеней, правильныхъ многогранниковъ оказывается уже недостаточно, и здѣсь обнаруживается любопытный, но вполнѣ естественный фактъ: теорія этихъ уравненій оказывается зависящей отъ свойствъ *правильныхъ многомѣрныхъ тѣлъ* (каковы, напримѣръ, правильные многоячейники), и если мы не хотимъ

*) Классическое изслѣдованіе Ф. Клейна по этому предмету такъ и озаглавлено: «Лекціи объ икосаедрѣ и о рѣшеніи уравненій пятой степени».

лишиться здѣсь плодотворныхъ геометрическихъ указаній, то неизбѣжно будемъ приведены къ пространствамъ многихъ измѣреній.

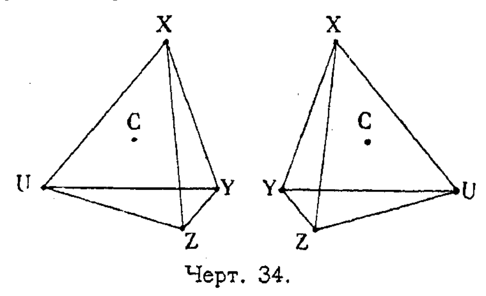
Если бы мы захотѣли проникнуть глубже въ сущность отмѣченной связи между двумя, казалось бы, разнохарактерными вопросами—мы пришли бы къ «теоріи группъ», которая уже явно соприкасается съ обѣими областями. И не только съ ними, но и съ множествомъ другихъ главъ математики, напримѣръ—черезъ комбинаторику—съ теоріей чиселъ, такъ что и здѣсь можетъ отразиться вліяніе многомѣрныхъ геометрій. Дѣйствительно, по мнѣнію (страдающему развѣ только излишней общностью) одного математика, «современная теорія чиселъ въ своихъ главныхъ задачахъ изучаетъ симметріи въ многомѣрныхъ пространствахъ».

Четвертое измѣреніе и естествознаніе.

Химія. Здѣсь, въ концѣ прошлаго вѣка, возникла новая отрасль—«стереохимія», которая, какъ видно уже изъ названія, вноситъ въ химію стереометрическія соображенія. Поводомъ къ такому неожиданному сближенію послужило замѣчательное свойство углерода образовывать соединенія, совершенно одинаковыя по химическому составу, но различныя по физическимъ свойствамъ (одни вращаютъ плоскость поляризаціи вправо, другія—на такой же уголъ влѣво). Сначала пытались объяснить этотъ фактъ одинаково съ аналогичной особенностью нѣкоторыхъ кристалловъ, но когда выяснилось, что явленіе имѣетъ также мѣсто при растворенномъ или парообразномъ состояніи углеродныхъ соединеній—химики вынуждены были допустить, что различіе коренится въ неодинаковой структурѣ отдѣльныхъ молекулъ того и другого соединенія. Оказалось цѣлесообразнымъ символизировать структуру такой молекулы при помощи тетраедра, въ центрѣ котораго помѣщаютъ углеродъ, а по четыремъ вершинамъ символы тѣхъ четырехъ (углеродъ четырехвалентенъ) элементовъ или радикаловъ, съ которыми углеродъ вступилъ въ соединеніе. При этомъ, упомянутыя выше соединенія, одинаковыя по составу, но различныя по физическимъ свойствамъ—такъ наз. *изомеры*—

символизируются двумя тетраедрами (см. черт. 34), составленными изъ одинаковыхъ граней, но не допускающими совмѣщенія.

Тѣ изъ читателей, которымъ такая символика покажется слишкомъ убогой, пусть вспомнитъ, насколько несложны остальные символическіе



Черт. 34.

методы химиковъ: при помощи нѣсколькихъ десятковъ буквенныхъ знаковъ и небольшихъ чиселъ въ качествѣ указателей, изображается все безконечное разнообразіе химическихъ процессовъ! Такъ и здѣсь: весьма важные выводы дѣлаются изъ простѣйшихъ фактовъ. Напримѣръ, если изъ четырехъ элементовъ X, Y, Z и U два, напр., Y и Z сдѣлаются одинаковыми, такъ что ребра XY и XZ, UY и UZ придется взять равными, то исчезнетъ послѣднее различіе между тетраедрами: они станутъ совмѣстимыми. Этому соотвѣтствуетъ тотъ важный химическій фактъ, что изомерія свойственна исключительно соединеніямъ углерода съ четырьмя *различными* частицами.

Когда пожелали распространить тотъ же методъ на соединенія пятивалентныхъ элементовъ (каковымъ, напр., является въ нѣкоторыхъ случаяхъ азотъ), то на первыхъ порахъ обратились къ пятиграннику—но онъ оказался непригоднымъ: не получалось уже тѣхъ плодотворныхъ наведеній, которыя такъ удачно согласовались съ фактами въ предыдущемъ случаѣ. И только въ недавнее время выяснилось, что естественнымъ символомъ для пятивалентныхъ соединеній можетъ служить четырехмѣрный образъ, именно *пятиячейникъ*, разсмотрѣнный нами выше— поучительный примѣръ того, въ какихъ отдаленныхъ областяхъ оказывается полезнымъ «многомѣрное мышленіе».

Физика. Смѣлость новѣйшихъ физическихъ теорій широко открываетъ четвертому измѣренію путь въ эту науку. Крайне усложнившееся ученіе о строеніи вещества, эфира и т. п., даетъ почву для смѣлыхъ догадокъ, въ родѣ слѣдующей, высказанной проф. Пирсономъ и, конечно, имъ обоснованной: «быть можетъ, атомъ и есть мѣсто, откуда эфиръ проникаетъ въ наше пространство изъ пространства четырехмѣрнаго». Однако, повидимому, не здѣсь суждено идеѣ четвертаго измѣренія сыграть свою

главную роль. Подчеркиваемъ: *идеѣ* 4-го измѣренія, а не тому частному виду сверхгеометріи, о которомъ у насъ преимущественно шла рѣчь. Говоря это, мы имѣемъ въ виду новѣйшее пріобрѣтеніе физики—«принципъ относительности».

За послѣднее десятилѣтіе въ физикѣ произошелъ переворотъ, который по своему характеру и глубинѣ сближается съ переворотомъ въ чистой математикѣ, вызваннымъ появленіемъ не-Эвклидовой геометріи. Мы не имѣемъ въ виду касаться здѣсь физической стороны «принципа относительности», надѣясь вернуться къ этому въ другомъ томѣ хрестоматіи. Математическое же содержаніе этого принципа, развитое Минковскимъ и Эйнштейномъ, дѣйствительно имѣетъ непосредственное отношеніе къ нашей темѣ. Идея четвертаго измѣренія глубоко заложена уже въ нѣдрахъ старой «классической» механики. Основной ея отдѣлъ—кинематика—изучаетъ измѣненіе трехъ пространственныхъ координатъ x, y и z точки, въ связи съ измѣненіемъ четвертой перемѣнной t—времени. Мы имѣемъ здѣсь, такимъ образомъ, аналитическое многообразіе четвертой ступени—и въ этомъ смыслѣ кинематика всегда была «аналитической геометріей 4-мѣрнаго пространства»; отсюда ея значительная сложность, по сравненію, напримѣръ, съ обыкновенной аналитической геометріей,—сложность, проистекающая единственно отъ появленія четвертой координаты t. При всемъ томъ механика Галилея и Ньютона существенно отличается отъ разсмотрѣнной нами выше сверхгеометріи, и это потому, что четыре перемѣнныя x, y, z и t играютъ въ нашемъ многообразіи далеко не одинаковую роль: по отношенію къ первымъ тремъ оно дѣйствительно какъ бы «симметрично», четвертая же координата t занимаетъ совсѣмъ особое положеніе. Математическое содержаніе «принципа относительности» сводится именно къ сближенію четырехъ координатъ x, y, z и t; правда, и теперь онѣ не вполнѣ равноправны, но между ними появляется уже органическая связь, выражающаяся между прочимъ въ томъ, что отнынѣ единицы пространства и времени не могутъ быть выбраны независимо другъ отъ друга. Минковскій такъ аргументируетъ свое новое міровоззрѣніе*); «Никто

*) *Минковскій*. Пространство и время. Перев. съ нѣм. Спб. 1911. Стр. 27—28.

не наблюдалъ мѣста иначе, какъ въ опредѣленное время или время иначе, какъ въ опредѣленномъ мѣстѣ. Но я преклонюсь пока передъ догмой, что пространство и время имѣютъ оба совершенно самостоятельное значеніе. Точку пространства въ точкѣ времени *), т.-е. систему значеній x, y, z и t я назову *міровой точкой*. Многообразіе всѣхъ мыслимыхъ системъ значеній x, y, z и t пусть называется *міромъ*. Кускомъ мѣла я могъ бы смѣло начертить на доскѣ четыре міровыя оси». Далѣе говорится, что если бы мы умѣли отличить разъ замѣченную точку въ любое другое время, то совокупность значеній x, y, z и t, соотвѣтствующихъ этой точкѣ составила бы ея *міровую линію* (въ четырехмѣрномъ пространствѣ). Послѣдующія разсужденія значительно болѣе спеціальнаго характера; достаточно сказать, что основную роль здѣсь играетъ нѣкоторый четырехмѣрный образъ—«двуполый сверхгиперболоидъ». Математическая стройность этого построенія и согласованность съ физическими фактами даютъ Минковскому увѣренность заявить, что «отнынѣ пространство и время, разсматриваемыя отдѣльно и независимо, обращаются въ тѣни и только ихъ соединеніе сохраняетъ самостоятельность».

Отдѣльные факты и попытки объяснить ихъ при помощи 4-го измѣренія. Здѣсь мы переходимъ сразу изъ храма науки на задворки его. Упоминавшіеся выше опыты спиритовъ съ развязываніемъ узловъ, исчезновеніемъ предметовъ изъ подъ стекляннаго колпака и т. п., конечно, заставляли бы надъ собой призадуматься, если бы не участіе въ опытахъ профессіональныхъ «медіумовъ» и не субъективность тѣхъ единичныхъ, заслуживающихъ довѣрія лицъ, которыя въ эти факты увѣровали.

Имѣются, однако, и объективные факты, допускающіе возможность истолкованія ихъ при помощи четвертаго измѣренія; вотъ, напр., одинъ изъ нихъ. Во времена извѣстнаго астронома Тихо-де-Браге на небѣ появилась звѣзда, которая изъ чуть замѣтной точки превратилась вскорѣ въ звѣзду 1-ой величины, затѣмъ опять стала сокращаться и вскорѣ исчезла. Читатель, быть можетъ, уже самъ замѣтилъ тождественность этого явленія съ описаннымъ у насъ (стр. 75) «прохожденіемъ сверхшара сквозь пространство».

*) Т.-е. въ данный моментъ времени.

При всей соблазнительности подобныхъ объясненій, слѣдуетъ признать ихъ лишенными *пока* научной цѣнности. Въ самомъ дѣлѣ, цѣнность научной гипотезы не только въ томъ, чтобы она *объясняла* нѣкоторые факты (вѣдь и космогоническія гипотезы первобытныхъ народовъ въ извѣстномъ смыслѣ «объясняютъ» мірозданіе), а, главнымъ образомъ, въ томъ, чтобы она ихъ *предсказывала*. Вотъ, еслибы накопилось достаточное число такихъ фактовъ, какъ, напр., «явленіе Тихо-де-Браге»,—то было бы разумно, наряду съ прочими гипотезами, попытаться вычислить возможныя траекторіи предполагаемыхъ сверхтѣлъ въ четырехмѣрномъ пространствѣ. Для этого уже имѣется наготовѣ математическій аппаратъ; и если бы удалось при помощи такого вычисленія предсказать новыя «прохожденія сверхтѣлъ», подобно тому, какъ теперь предсказывается появленіе кометъ, это было бы истиннымъ торжествомъ четвертаго измѣренія въ качествѣ естественно-научной гипотезы. До тѣхъ поръ четвертое измѣреніе остается (въ прикладныхъ наукахъ) только одной изъ возможныхъ гипотезъ будущаго.

Заключеніе.

Цѣлесообразность и законность многомѣрной геометріи, какъ одной изъ главъ чистой математики, въ настоящее время не оспаривается. Что же касается упомянутыхъ выше физическихъ и др. теорій, то онѣ, конечно, могутъ оказаться скоропреходящими. Однако, это не должно смущать и тѣхъ, кто видитъ въ математикѣ прикладную цѣнность. Обращаясь къ послѣднимъ, скажемъ словами Клейна *): «профанъ заранѣе мало склоненъ приписать какую-нибудь цѣнность занятію проблемами, которыя возникаютъ прежде всего изъ субъективнаго, такъ сказать, эстетическаго стремленія къ познанію математики; но исторія науки показываетъ, что дѣло обстоитъ совершенно иначе. Это большая тайна, которую трудно выразить словами. Я скажу лишь, что все то, что здорово въ математическомъ отношеніи, рано или поздно пріобрѣтаетъ значеніе, далеко выхо-

*) *Ф. Клейнъ*. «О геометрическихъ основаніяхъ Лоренцовой группы». Сборн. «Новыя идеи въ математикѣ». № 5, стр. 157.

дящее за предѣлы его первоначальной области. Такова была судьба теоріи коническихъ сѣченій, которую развили древніе геометры ради нея самой и которая, вмѣстѣ съ открытіемъ кеплеровыхъ законовъ, получила внезапно величайшее значеніе для нашего пониманія природы». Ту же мысль выражаютъ и слѣдующія слова Велльштейна *), относящіяся къ другой родственной темѣ (о не-Эвклидовыхъ геометріяхъ): «*умственная работа, затраченная на построеніе чисто абстрактной геометріи, послужитъ неизсякаемымъ источникомъ новыхъ истинъ*».

---

*) *Weber-Wellstein*. Энциклопедія элем. математики. Т. II, кн. 1, стр. 121. Одесса. 1913.

ИСТОЧНИКИ.

Бонола.—Неевклидова геометрія.
Веберъ и Велльштейнъ.—Энциклопедія элементарной математики. Т. II.
Jouffret. Traité élémentaire de Géométrié à quatre dimensions.
Jouffret. Mélanges de Géometrie à quatre dimensions.
Каганъ. Основанія геометріи.
Каганъ. Очеркъ геометрической системы Лобачевскаго.
Liebmann. Nicht-Euklidische Geometrie.
Пуанкаре. Наука и гипотеза.
Schoute. Mehrdimensionale Geometrie.
Энрикесъ. Вопросы элементарной геометріи.

СОДЕРЖАНІЕ.
